

## Der semiotische Begriff der Anwendung

1. „Angewandte“ Semiotik bedeutet normalerweise und trivialerweise die Anwendung der theoretischen Semiotik (sofern man eine solche überhaupt kennen will). Meistens wird damit allerdings eine Pseudo-Semiotik bezeichnet, die keine theoretische Semiotik ist und mit dem Namen also der Mangel an formal-kontrollierbaren Strukturen, Prozessen und Systemen vertuscht.

Allerdings hat, was noch weniger bekannt ist, der Begriff „Anwendung“ selbst auch innerhalb der theoretischen Semiotik eine Anwendung. Max Bense definierte ihn wie folgt: „Im Anschluss an eine von H.B. Curry gegebene (mathematisch orientierte) Definition von ‚Anwendung‘, danach es sich hierbei um eine ‚dyadische Verknüpfung‘, d.h. ‚Zuordnung‘ handle, ‚wodurch zu jedem geordneten Paar von Etwas ein eindeutig bestimmtes Drittes zugeordnet wird‘, lässt sich die triadische Zeichenrelation über M, O und I auch als eine Anwendung, Anwendungsrelation bzw. Regel auffassen. Die Beziehung des Objektbezugs ( $M \rightarrow O$ ) innerhalb der triadischen Zeichenrelation  $M = R(M \rightarrow O \rightarrow I)$  auf I kann insofern ‚Anwendung‘ heißen, als das im Objektbezug hergestellte, bezeichnete Objekt im Interpretanten in einen neuen Bezug, nämlich in einen kontextlichen (rhematischen, dicentischen oder argumentischen) Zusammenhang mit anderen Zeichen gebracht wird, der seinerseits die situationsabhängige und kommunikationsabhängige Wirksamkeit der Zeichen im ‚Netzwerk‘ bzw. im Kanal bedingt“ (Bense/Walther 1973, S. 16).

2. Im folgenden wird vorgeschlagen, semiotische Anwendung dadurch zu formalisieren, dass die von Bense erwähnte dyadische Verknüpfung im Sinne einer gruppentheoretischen Verknüpfung gedeutet wird. Die Anwendung der Gruppentheorie auf die Semiotik, die übrigens von Bense selbst begründet wurde (vgl. Bense 1986, S. 43), empfiehlt sich deshalb, weil das Hauptaxiom der semiotischen Metaphysik besagt, dass nur das gegeben ist, was repräsentierbar ist (Bense 1981, S. 11). Aus diesem Axiom folgt das Lemma, dass „Zeichenmittel, Objekt und Interpretant in ein und derselben Welt sind“ (Gfesser 1990, S. 139). Die Annahme apriorischer Objekte wird deshalb in der semiotischen Metaphysik Bensescher Prägung durch das Konzept der „Disponibilität“ von Objekten ersetzt, die in eine Semiose eingehen und dadurch zu Meta-Objekten transformiert werden (Bense 1975, S. 45; 1967, S. 9). Wenn also zwei semiotische Elemente (Primzeichen, Subzeichen, Zeichen-

rümpfe, Zeichenklassen, Realitätsthematiken, Trichotomische Triaden usw.) miteinander verknüpft bzw. einander zugeordnet werden, so gewährleistet die semiotische Gruppentheorie gerade, dass das entstehende Dritte, das Verknüpfungssprodukt oder die Verknüpfungssumme, wieder Elemente der Gruppe ist, d.h. also semiotisch gesprochen, „in ein und derselben Welt“ ist. Die folgende Darstellung folgt weitgehend Toth (2008b), wobei hier das Hauptgewicht auf die semiotischen Anwendungen, d.h. die Additionen (im Abelschen Falle) oder die Multiplikationen gelegt wird.

3. Eine (abgeschlossene) dyadische bzw. binäre Operation auf einer nichtleeren Menge  $G$  ist eine Abbildung  $\alpha: G \times G \rightarrow G$ . Ein Gruppoid  $(G, \circ)$  ist eine nichtleere Menge zusammen mit einer binären Operation. Seien  $L(a)$  und  $R(a)$  Translationen, so dass  $xL(a) = ax$  und  $xR(a) = xa$  für alle  $x \in G$ , d.h.  $L(a): G \rightarrow G$  und  $R(a): G \rightarrow G$  für jedes  $a \in G$ , dann verstehen wir unter einer Quasigruppe ein Gruppoid, deren Translationen bijektiv sind für alle  $a \in G$ . Ein Gruppoid ist kommutativ, wenn  $L(a) = R(a)$  für alle  $a \in G$ , und assoziativ, wenn  $R(a \circ b) = R(a)R(b)$  für alle  $a, b \in G$ . Assoziative Gruppoide heissen Halbgruppen. Eine Quasigruppe heisst ein Loop, wenn sie ein Einselement hat. Assoziative Loops heissen Gruppen, d.h. Gruppen sind Quasigruppen, welche vermöge ihrer Assoziativität ein Einselement haben. Wegen der Bijektivität von  $L(a)$  und  $R(a)$  gibt es inverse Abbildungen  $L(a)^{-1}$  und  $R(a)^{-1}$ , mit deren Hilfe wir die folgenden binären Operationen definieren:  $x \setminus y = yL(x)^{-1}$  und  $x / y = xR(y)^{-1}$  für alle  $x, y \in G$ . Die Quasigruppen  $(G, \setminus)$  und  $(G, /)$  nennen wir Konjugierte von  $(G, \circ)$ . Wenn wir  $F(a, b) = c$  schreiben anstatt  $a \circ b = c$ , dann erhalten wir:  $F(a, b) = c$ ;  $F^{-1}(c, b) = a$ ;  ${}^{-1}F(a, c) = b$ ;  ${}^{-1}(F^{-1})(c, a) = b$ ;  $({}^{-1}F)^{-1}(b, c) = a$ ;  $({}^{-1}(F^{-1}))^{-1}(b, a) = c$ . Zu jeder Quasigruppe gibt es genau 6 solcher Parastrophen (Pflugfelder 1990, S. 43).

Gegeben sei die Menge  $PZ = \{1, 2, 3\}$  der Primzeichen und die Verknüpfung  $\circ$ . Da wir eine Tafel herstellen können wie zum Beispiel:

|         |   |   |   |
|---------|---|---|---|
| $\circ$ | 1 | 2 | 3 |
| 1       | 3 | 1 | 2 |
| 2       | 1 | 2 | 3 |
| 3       | 2 | 3 | 1 |

ist  $(PZ, \circ)$  eine Quasigruppe. Dann können wir die zugehörigen 6 Parastrophen  $(\pi_i)$  wie folgt darstellen:

$$(\pi_1) = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} = F \quad (\pi_2) = \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} = F^{-1} \quad (\pi_3) = \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} = \cdot F$$

$$(\pi_4) = \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} = \cdot (F^{-1}) \quad (\pi_5) = \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} = \cdot (F^{-1}) \quad (\pi_6) = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} = (\cdot F^{-1})^{-1}$$

Quasigruppen werden in Form von Matrizen mit  $n^2$  Elementen dargestellt (wobei  $n$  die Ordnung der Quasigruppe ist), die als Lateinische Quadrate bekannt sind, unter der Bedingung, dass keine zwei gleichen Elemente in derselben Zeile oder Kolonne stehen. Mit Hilfe der 6 Parastrophen erhalten wir dann genau 12 Quasigruppen, die sich in zwei Untergruppen einteilen lassen: in solche mit identischer Nebendiagonale und in solche mit identischer Hauptdiagonale.

Semiotische Quasigruppen mit identischer Nebendiagonale

$$\begin{array}{c|ccc} \circ_1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \circ_2 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \circ_3 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} \circ_4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \circ_5 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \circ_6 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

## 4. Gruppen

### 4.1. Die Gruppe $(PZ, \circ_1)$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_1 1 = 2$ ;  $1 \circ_1 2 = 2 \circ_1 1 = 3$ ;  $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$ ;  $2 \circ_1 2 = 1$ ;  $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$ ;  $3 \circ_1 3 = 3$ .
2. Assoziativität:  $1 \circ_1 (2 \circ_1 3) = (1 \circ_1 2) \circ_1 3 = 2$ ;  $2 \circ_1 (3 \circ_1 2) = (2 \circ_1 3) \circ_1 2 = 1$ ;  $3 \circ_1 (3 \circ_1 1) = (3 \circ_1 3) \circ_1 1 = 1$ , usw.
3. Einselement:  $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$ ;  $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$ ;  $3 \circ_1 3 = 3$ , d.h.  $e = 3$ .
4. Inverses Element:  $1^{-1} = 2$ , denn  $1 \circ_1 2 = 3$ ;  $2^{-1} = 1$ , denn  $2 \circ_1 1 = 3$ ;  $3^{-1} = 3 = \text{const.}$

Sei  $\sigma_1: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$ , dann erzeugt  $\sigma_1$  die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

- $\sigma_1(3.1.2.1.1.1) \rightarrow (3.2.1.2.2.2)$
- $\sigma_1(3.1.2.1.1.2) \rightarrow (3.2.1.2.2.1)$
- $\sigma_1(3.1.2.1.1.3) \rightarrow (3.2.1.2.2.3)$
- $\sigma_1(3.1.2.2.1.2) \rightarrow (3.2.1.1.2.1)$
- $\sigma_1(3.1.2.2.1.3) \rightarrow (3.2.1.1.2.3)$
- $\sigma_1(3.1.2.3.1.3) \rightarrow (3.2.1.3.2.3)$
- $\sigma_1(3.2.2.2.1.2) \rightarrow (3.1.1.1.2.1)$
- $\sigma_1(3.2.2.2.1.3) \rightarrow (3.1.1.1.2.3)$
- $\sigma_1(3.2.2.3.1.3) \rightarrow (3.1.1.3.2.3)$
- $\sigma_1(3.3.2.3.1.3) \rightarrow (3.3.1.3.2.3)$

#### 4.2. Die Gruppe $(PZ, \circ_2)$

$(PZ, \circ_2)$  wurde bereits von Bogarín (1992) als Gruppe nachgewiesen, nachdem Bense kurz darauf hingewiesen hatte, dass "die kleine semiotische Matrix [...] der Cayleyschen Gruppentafel entspricht" (1986, S. 43).

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_2 1 = 3; 1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1; 1 \circ_2 3 = 3 \circ_2 1 = 2; 2 \circ_2 2 = 2; 2 \circ_2 3 = 3 \circ_2 2 = 3; 3 \circ_2 3 = 1$ .
2. Assoziativität:  $1 \circ_2 (2 \circ_2 3) = (1 \circ_2 2) \circ_2 3 = 2; 2 \circ_2 (3 \circ_2 2) = (2 \circ_2 3) \circ_2 2 = 3; 3 \circ_2 (3 \circ_2 1) = (3 \circ_2 3) \circ_2 1 = 3$ , usw.
3. Einselement:  $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1; 2 \circ_2 2 = 2; 3 \circ_2 2 = 2 \circ_2 3 = 3$ , d.h.  $e = 2$ .
4. Inverses Element:  $1^{-1} = 3$ , denn  $1 \circ_2 3 = 2; 2^{-1} = 2 = \text{const.}, 3^{-1} = 1$ , denn  $3 \circ_2 1 = 2$ .

Sei  $\sigma_2: 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ , dann erzeugt  $\sigma_2$  die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

- $\sigma_2(3.1.2.1.1.1) \rightarrow (1.3.2.3.3.3)$
- $\sigma_2(3.1.2.1.1.2) \rightarrow (1.3.2.3.3.2)$
- $\sigma_2(3.1.2.1.1.3) \rightarrow (1.3.2.3.3.1)$
- $\sigma_2(3.1.2.2.1.2) \rightarrow (1.3.2.2.3.2)$
- $\sigma_2(3.1.2.2.1.3) \rightarrow (1.3.2.2.3.1)$
- $\sigma_2(3.1.2.3.1.3) \rightarrow (1.3.2.1.3.1)$
- $\sigma_2(3.2.2.2.1.2) \rightarrow (1.2.2.2.3.2)$

$$\begin{aligned}\sigma_2(3.2.2.2.1.3) &\rightarrow (1.2.2.2.3.1) \\ \sigma_2(3.2.2.3.1.3) &\rightarrow (1.2.2.1.3.1) \\ \sigma_2(3.3.2.3.1.3) &\rightarrow (1.1.2.1.3.1)\end{aligned}$$

#### 4.3. Die Gruppe $(PZ, \circ_3)$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_3 1 = 1$ ;  $1 \circ_3 2 = 2 \circ_3 1 = 2$ ;  $1 \circ_3 3 = 3 \circ_3 1 = 3$ ;  $2 \circ_3 2 = 3$ ;  $2 \circ_3 3 = 3 \circ_3 2 = 1$ ;  $3 \circ_3 3 = 2$ .
2. Assoziativität:  $1 \circ_3 (2 \circ_3 3) = (1 \circ_3 2) \circ_3 3 = 1$ ;  $2 \circ_3 (3 \circ_3 2) = (2 \circ_3 3) \circ_3 2 = 2$ ;  $3 \circ_3 (3 \circ_3 1) = (3 \circ_3 3) \circ_3 1 = 2$ , usw.
3. Einselement:  $1 \circ_3 1 = 1$ ;  $2 \circ_3 1 = 1 \circ_3 2 = 2$ ;  $3 \circ_3 1 = 1 \circ_3 3 = 3$ , d.h.  $e = 1$ .
4. Inverses Element:  $1^{-1} = 1 = \text{const.}$ ,  $2^{-1} = 3$ , denn  $2 \circ_3 3 = 1$ ,  $3^{-1} = 2$ , denn  $3 \circ_3 2 = 1$ .

Sei  $\sigma_3: 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$ , dann erzeugt  $\sigma_3$  die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

$$\begin{aligned}\sigma_3(3.1.2.1.1.1) &\rightarrow (2.1.3.1.1.1) \\ \sigma_3(3.1.2.1.1.2) &\rightarrow (2.1.3.1.1.3) \\ \sigma_3(3.1.2.1.1.3) &\rightarrow (2.1.3.1.1.2) \\ \sigma_3(3.1.2.2.1.2) &\rightarrow (2.1.3.3.1.3) \\ \sigma_3(3.1.2.2.1.3) &\rightarrow (2.1.3.3.1.2) \\ \sigma_3(3.1.2.3.1.3) &\rightarrow (2.1.3.2.1.2) \\ \sigma_3(3.2.2.2.1.2) &\rightarrow (2.3.3.3.1.3) \\ \sigma_3(3.2.2.2.1.3) &\rightarrow (2.3.3.3.1.2) \\ \sigma_3(3.2.2.3.1.3) &\rightarrow (2.3.3.2.1.2) \\ \sigma_3(3.3.2.3.1.3) &\rightarrow (2.2.3.2.1.2)\end{aligned}$$

Alle drei Gruppen sind offensichtlich kommutativ, d.h. abelsch.

#### 5. Kommutative Quasigruppen

##### 5.1. Die kommutative Quasigruppe $(PZ, \circ_4)$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_4 1 = 3$ ;  $1 \circ_4 2 = 2 \circ_4 1 = 2$ ;  $1 \circ_4 3 = 3 \circ_4 1 = 1$ ;  $2 \circ_4 2 = 1$ ;  $2 \circ_4 3 = 3 \circ_4 2 = 3$ ;  $3 \circ_4 3 = 2$ .
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt:  $1 \circ_4 (2 \circ_4 3) = 1 \neq (1 \circ_4 2) \circ_4 3 = 3$ ;  $3 \circ_4 (3 \circ_4 1) = 1 \neq (3 \circ_4 3) \circ_4 1 = 2$ , usw.
3. Einselemente:  $1 \circ_4 3 = 3 \circ_4 1 = 1$ ;  $2 \circ_4 1 = 1 \circ_4 2 = 2$ ;  $3 \circ_4 2 = 2 \circ_4 3 = 3$ .

### 5.2. Die kommutative Quasigruppe $(PZ, \circ_5)$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_5 1 = 1$ ;  $1 \circ_5 2 = 2 \circ_5 1 = 3$ ;  $1 \circ_5 3 = 3 \circ_5 1 = 2$ ;  $2 \circ_5 2 = 2$ ;  $2 \circ_5 3 = 3 \circ_5 2 = 1$ ;  $3 \circ_5 3 = 3$ .
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt:  $1 \circ_5 (2 \circ_5 3) = 1 \neq (1 \circ_5 2) \circ_5 3 = 3$ ;  $3 \circ_5 (3 \circ_5 1) = 1 \neq (3 \circ_5 3) \circ_5 1 = 2$ , usw.
3. Einselemente:  $1 \circ_5 1 = 1$ ;  $2 \circ_5 2 = 2$ ;  $3 \circ_5 3 = 3$ . (Weil hier jedes Element idempotent ist, ist  $(PZ, \circ_5)$  eine Steiner-Quasigruppe; vgl. Lindner und Evans 1977, S. 51 ff.).

### 5.3. Die kommutative Quasigruppe $(PZ, \circ_6)$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_6 1 = 2$ ;  $1 \circ_6 2 = 2 \circ_6 1 = 1$ ;  $1 \circ_6 3 = 3 \circ_6 1 = 3$ ;  $2 \circ_6 2 = 3$ ;  $2 \circ_6 3 = 3 \circ_6 2 = 2$ ;  $3 \circ_6 3 = 1$ .
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt:  $1 \circ_6 (2 \circ_6 3) = 1 \neq (1 \circ_6 2) \circ_6 3 = 3$ ;  $3 \circ_6 (3 \circ_6 1) = 1 \neq (3 \circ_6 3) \circ_6 1 = 2$ , usw.
3. Einselemente:  $1 \circ_6 2 = 2 \circ_6 1 = 1$ ;  $2 \circ_6 3 = 3 \circ_6 2 = 2$ ;  $3 \circ_6 1 = 1 \circ_6 3 = 3$ .

Die drei Quasigruppen  $(PZ, \circ_4)$ ,  $(PZ, \circ_5)$  und  $(PZ, \circ_6)$  bilden also Loops, da sie Einselemente haben, wobei die entsprechenden Links- ( $a^{\lambda}$ ) und Rechtsinversen ( $a^{\rho}$ ) jeweils zusammenfallen.

## 6. Semiotische Quasigruppen mit identischer Hauptdiagonale

|           |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|
| $\circ_7$ | <u>1</u> | <u>2</u> | <u>3</u> |
| 1         | 3        | 1        | 2        |
| 2         | 2        | 3        | 1        |
| 3         | 1        | 2        | 3        |

|           |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|
| $\circ_8$ | <u>1</u> | <u>2</u> | <u>3</u> |
| 1         | 3        | 2        | 1        |
| 2         | 1        | 3        | 2        |
| 3         | 2        | 1        | 3        |

|           |          |          |          |
|-----------|----------|----------|----------|
| $\circ_9$ | <u>1</u> | <u>2</u> | <u>3</u> |
| 1         | 2        | 1        | 3        |
| 2         | 3        | 2        | 1        |
| 3         | 1        | 3        | 2        |

|              |          |          |          |
|--------------|----------|----------|----------|
| $\circ_{10}$ | <u>1</u> | <u>2</u> | <u>3</u> |
| 1            | 2        | 3        | 1        |
| 2            | 1        | 2        | 3        |
| 3            | 3        | 1        | 2        |

|              |          |          |          |
|--------------|----------|----------|----------|
| $\circ_{11}$ | <u>1</u> | <u>2</u> | <u>3</u> |
| 1            | 1        | 2        | 3        |
| 2            | 3        | 1        | 2        |
| 3            | 2        | 3        | 1        |

|              |          |          |          |
|--------------|----------|----------|----------|
| $\circ_{12}$ | <u>1</u> | <u>2</u> | <u>3</u> |
| 1            | 1        | 3        | 2        |
| 2            | 2        | 1        | 3        |
| 3            | 3        | 2        | 1        |

## 61. Nichtkommutative Quasigruppen

### 6.1. Die nichtkommutative Quasigruppe $(PZ, \circ_7)$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_7 1 = 3$ ;  $1 \circ_7 2 = 1 \neq 2 \circ_7 1 = 2$ ;  $1 \circ_7 3 = 2 \neq 3 \circ_7 1 = 1$ ;  $2 \circ_7 2 = 3$ ;  $2 \circ_7 3 = 1 \neq 3 \circ_7 2 = 2$ ;  $3 \circ_7 3 = 3$ .
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt:  $1 \circ_7 (2 \circ_7 3) = 3 \neq (1 \circ_7 2) \circ_7 3 = 2$ , usw.
3. Einselemente:  $1 \circ_7 2 = 1 \neq 2 \circ_7 1 = 2$ ;  $2 \circ_7 1 = 2 \neq 1 \circ_7 2 = 1$ ;  $3 \circ_7 3 = 3$ .

### 6.2. Die nichtkommutative Quasigruppe $(PZ, \circ_8)$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_8 1 = 3$ ;  $1 \circ_8 2 = 2 \neq 2 \circ_8 1 = 1$ ;  $1 \circ_8 3 = 1 \neq 3 \circ_8 1 = 2$ ;  $2 \circ_8 2 = 3$ ;  $2 \circ_8 3 = 2 \neq 3 \circ_8 2 = 1$ ;  $3 \circ_8 3 = 3$ .
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt:  $1 \circ_8 (3 \circ_8 2) = 3 \neq (1 \circ_8 3) \circ_8 2 = 2$ , usw.
3. Einselemente:  $1 \circ_8 3 = 1 \neq 3 \circ_8 1 = 2$ ;  $2 \circ_8 3 = 2 \neq 3 \circ_8 2 = 1$ ;  $3 \circ_8 3 = 3$ .

### 6.3. Die nichtkommutative Quasigruppe $(PZ, \circ_9)$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_9 1 = 2$ ;  $1 \circ_9 2 = 1 \neq 2 \circ_9 1 = 3$ ;  $1 \circ_9 3 = 3 \neq 3 \circ_9 1 = 1$ ;  $2 \circ_9 2 = 2$ ;  $2 \circ_9 3 = 1 \neq 3 \circ_9 2 = 3$ ;  $3 \circ_9 3 = 2$ .
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt:  $1 \circ_9 (2 \circ_9 3) = 2 \neq (1 \circ_9 2) \circ_9 3 = 3$ , usw.
3. Einselemente:  $1 \circ_9 2 = 1 \neq 2 \circ_9 1 = 3$ ;  $2 \circ_9 2 = 2$ ;  $3 \circ_9 2 = 3 \neq 2 \circ_9 3 = 1$ .

### 6.4. Die nichtkommutative Quasigruppe $(PZ, \circ_{10})$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_{10} 1 = 2$ ;  $1 \circ_{10} 2 = 3 \neq 2 \circ_{10} 1 = 1$ ;  $1 \circ_{10} 3 = 1 \neq 3 \circ_{10} 1 = 3$ ;  $2 \circ_{10} 2 = 2$ ;  $2 \circ_{10} 3 = 3 \neq 3 \circ_{10} 2 = 1$ ;  $3 \circ_{10} 3 = 2$ .
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt:  $1 \circ_{10} (2 \circ_{10} 3) = 1 \neq (1 \circ_{10} 2) \circ_{10} 3 = 2$ , usw.
3. Einselemente:  $1 \circ_{10} 3 = 1 \neq 3 \circ_{10} 1 = 3$ ;  $2 \circ_{10} 2 = 2$ ;  $3 \circ_{10} 1 = 3 \neq 1 \circ_{10} 3 = 1$ .

### 6.5. Die nichtkommutative Quasigruppe $(PZ, \circ_{11})$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_{11} 1 = 1$ ;  $1 \circ_{11} 2 = 2 \neq 2 \circ_{11} 1 = 3$ ;  $1 \circ_{11} 3 = 3 \neq 3 \circ_{11} 1 = 2$ ;  $2 \circ_{11} 2 = 1$ ;  $2 \circ_{11} 3 = 2 \neq 3 \circ_{11} 2 = 3$ ;  $3 \circ_{11} 3 = 1$ .
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt:  $2 \circ_{11} (1 \circ_{11} 3) = 2 \neq (2 \circ_{11} 1) \circ_{11} 3 = 1$ , usw.
3. Einselemente:  $1 \circ_{11} 1 = 1$ ;  $2 \circ_{11} 3 = 2 \neq 3 \circ_{11} 2 = 3$ ;  $3 \circ_{11} 2 = 3 \neq 2 \circ_{11} 3 = 2$ .

### 6.6. Die nichtkommutative Quasigruppe $(PZ, \circ_{12})$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_{12} 1 = 1$ ;  $1 \circ_{12} 2 = 3 \neq 2 \circ_{12} 1 = 2$ ;  $1 \circ_{12} 3 = 2 \neq 3 \circ_{12} 1 = 3$ ;  $2 \circ_{12} 2 = 1$ ;  $2 \circ_{12} 3 = 3 \neq 3 \circ_{12} 2 = 2$ ;  $3 \circ_{12} 3 = 1$ .
2. Die Assoziativitätsbedingung ist i.a. nicht erfüllt:  $1 \circ_{12} (2 \circ_{12} 3) = 2 \neq (1 \circ_{12} 2) \circ_{12} 3 = 1$ , usw.
3. Einselemente:  $1 \circ_{12} 1 = 1$ ;  $2 \circ_{12} 1 = 2 \neq 1 \circ_{12} 2 = 3$ ;  $3 \circ_{12} 1 = 3 \neq 1 \circ_{12} 3 = 2$ .

Bei den sechs Quasigruppen  $(PZ, \circ_7)$  bis  $(PZ, \circ_{12})$  gilt also  $a^{\lambda} \neq a^{\rho}$ , d.h. die entsprechenden Links- und Rechtsinversen fallen nicht zusammen.

7. Wenn wir die 6 Permutationen der paarweise verschiedenen Elemente von  $PZ$  anschauen, dann erzeugen

|             |             |
|-------------|-------------|
| $(1, 2, 3)$ | $(2, 1, 3)$ |
| $(1, 3, 2)$ | $(1, 3, 2)$ |
| $(2, 3, 1)$ | $(1, 2, 3)$ |

genau die 3 möglichen semiotischen Gruppen  $(PZ, \circ_1)$ ,  $(PZ, \circ_2)$  und  $(PZ, \circ_3)$ , wie man leicht nachprüft.

Wenn wir hingegen die 27 Permutationen von nur je 2 Elementen aus  $PZ$  anschauen, dann erzeugen, wie im folgenden gezeigt wird,

|             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|
| $(1, 1, 1)$ | $(2, 1, 1)$ | $(3, 1, 1)$ |
| $(1, 1, 2)$ | $(2, 1, 2)$ | $(3, 1, 2)$ |
| $(1, 1, 3)$ | $(2, 1, 3)$ | $(3, 1, 3)$ |
| $(1, 2, 1)$ | $(2, 2, 1)$ | $(3, 2, 1)$ |
| $(1, 2, 2)$ | $(2, 2, 2)$ | $(3, 2, 2)$ |



|           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|
| (1, 2, 3) | (2, 2, 3) | (3, 2, 3) |
| (1, 3, 1) | (2, 3, 1) | (3, 3, 1) |
| (1, 3, 2) | (2, 3, 2) | (3, 3, 2) |
| (1, 3, 3) | (2, 3, 3) | (3, 3, 3) |

genau die 9 möglichen semiotischen Quasigruppen  $(PZ, \circ_4)$  bis  $(PZ, \circ_{12})$ .

7.1.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(1\ 1\ 1)$

$\sigma_4(a.b\ c.d\ e.f) \rightarrow (1.1\ 1.1\ 1.1)$ , d.h.  $\sigma_4$  transformiert jede Zeichenklasse in die Zeichenrelation  $(1.1\ 1.1\ 1.1)$ .

7.2.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(1\ 1\ 2)$

$\sigma_5(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (2.1\ 1.1\ 1.1)$   
 $\sigma_5(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (2.1\ 1.1\ 1.1)$   
 $\sigma_5(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 1.1\ 1.2)$   
 $\sigma_5(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.1\ 1.1\ 1.1)$   
 $\sigma_5(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 1.1\ 1.2)$   
 $\sigma_5(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 1.2\ 1.2)$   
 $\sigma_5(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.1\ 1.1\ 1.1)$   
 $\sigma_5(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 1.1\ 1.2)$   
 $\sigma_5(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 1.2\ 1.2)$   
 $\sigma_5(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 1.2\ 1.2)$

7.3.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(1\ 1\ 3)$

$\sigma_6(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (3.1\ 1.1\ 1.1)$   
 $\sigma_6(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (3.1\ 1.1\ 1.1)$   
 $\sigma_6(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (3.1\ 1.1\ 1.3)$   
 $\sigma_6(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (3.1\ 1.1\ 1.1)$   
 $\sigma_6(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3.1\ 1.1\ 1.3)$   
 $\sigma_6(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (3.1\ 1.3\ 1.3)$   
 $\sigma_6(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (3.1\ 1.1\ 1.1)$   
 $\sigma_6(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3.1\ 1.1\ 1.3)$

$$\sigma_6(3.2.2.3.1.3) \rightarrow (3.1.1.3.1.3)$$

$$\sigma_6(3.3.2.3.1.3) \rightarrow (3.3.1.3.1.3)$$

$$7.4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_7(3.1.2.1.1.1) \rightarrow (1.1.2.1.1.1)$$

$$\sigma_7(3.1.2.1.1.2) \rightarrow (1.1.2.1.1.2)$$

$$\sigma_7(3.1.2.1.1.3) \rightarrow (1.1.2.1.1.1)$$

$$\sigma_7(3.1.2.2.1.2) \rightarrow (1.1.2.2.1.2)$$

$$\sigma_7(3.1.2.2.1.3) \rightarrow (1.1.2.2.1.1)$$

$$\sigma_7(3.1.2.3.1.3) \rightarrow (1.1.2.1.1.1)$$

$$\sigma_7(3.2.2.2.1.2) \rightarrow (1.2.2.2.1.2)$$

$$\sigma_7(3.2.2.2.1.3) \rightarrow (1.2.2.2.1.1)$$

$$\sigma_7(3.2.2.3.1.3) \rightarrow (1.2.2.1.1.1)$$

$$\sigma_7(3.3.2.3.1.3) \rightarrow (1.1.2.1.1.1)$$

$$7.5. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_8(3.1.2.1.1.1) \rightarrow (2.1.2.1.1.1)$$

$$\sigma_8(3.1.2.1.1.2) \rightarrow (2.1.2.1.1.2)$$

$$\sigma_8(3.1.2.1.1.3) \rightarrow (2.1.2.1.1.2)$$

$$\sigma_8(3.1.2.2.1.2) \rightarrow (2.1.2.2.1.2)$$

$$\sigma_8(3.1.2.2.1.3) \rightarrow (2.1.2.2.1.2)$$

$$\sigma_8(3.1.2.3.1.3) \rightarrow (2.1.2.2.1.2)$$

$$\sigma_8(3.2.2.2.1.2) \rightarrow (2.2.2.2.1.2)$$

$$\sigma_8(3.2.2.2.1.3) \rightarrow (2.2.2.2.1.2)$$

$$\sigma_8(3.2.2.3.1.3) \rightarrow (2.2.2.2.1.2)$$

$$\sigma_8(3.3.2.3.1.3) \rightarrow (2.2.2.2.1.2)$$

$$7.6. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_9(3.1.2.1.1.1) \rightarrow (1.1.3.1.1.1)$$

$$\sigma_9(3.1.2.1.1.2) \rightarrow (1.1.3.1.1.3)$$

$$\sigma_9(3.1.2.1.1.3) \rightarrow (1.1.3.1.1.1)$$

$\sigma_9 (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (1.1 3.3 1.3)$   
 $\sigma_9 (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (1.1 3.3 1.1)$   
 $\sigma_9 (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (1.1 3.1 1.1)$   
 $\sigma_9 (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (1.3 3.3 1.3)$   
 $\sigma_9 (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (1.3 3.3 1.1)$   
 $\sigma_9 (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (1.3 3.1 1.1)$   
 $\sigma_9 (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (1.1 3.1 1.1)$

7.7.  $(1 2 3)$   
 $(1 3 3)$

$\sigma_{10} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.1 3.1 1.1)$   
 $\sigma_{10} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.1 3.1 1.3)$   
 $\sigma_{10} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.1 3.1 1.3)$   
 $\sigma_{10} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.1 3.3 1.3)$   
 $\sigma_{10} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.1 3.3 1.3)$   
 $\sigma_{10} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.1 3.3 1.3)$   
 $\sigma_{10} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.3 3.3 1.3)$   
 $\sigma_{10} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.3 3.3 1.3)$   
 $\sigma_{10} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 3.3 1.3)$   
 $\sigma_{10} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 3.3 1.3)$

7.8.  $(1 2 3)$   
 $(2 1 1)$

$\sigma_{11} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (1.2 1.2 2.2)$   
 $\sigma_{11} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (1.2 1.2 2.1)$   
 $\sigma_{11} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (1.2 1.2 2.1)$   
 $\sigma_{11} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (1.2 1.1 2.1)$   
 $\sigma_{11} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (1.2 1.1 2.1)$   
 $\sigma_{11} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (1.2 1.1 2.1)$   
 $\sigma_{11} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (1.1 1.1 2.1)$   
 $\sigma_{11} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (1.1 1.1 2.1)$   
 $\sigma_{11} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (1.1 1.1 2.1)$   
 $\sigma_{11} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (1.1 1.1 2.1)$

7.9.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(2\ 1\ 2)$

$$\sigma_{12}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (2.2\ 1.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{12}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (2.2\ 1.2\ 2.1)$$

$$\sigma_{12}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 1.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{12}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.2\ 1.1\ 2.1)$$

$$\sigma_{12}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 1.1\ 2.2)$$

$$\sigma_{12}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 1.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{12}(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.1\ 1.1\ 2.1)$$

$$\sigma_{12}(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 1.1\ 2.2)$$

$$\sigma_{12}(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 1.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{12}(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 1.2\ 2.2)$$

7.10.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(2\ 2\ 1)$

$$\sigma_{13}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 1.2)$$

$$\sigma_{13}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{13}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 2.1)$$

$$\sigma_{13}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{13}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 2.1)$$

$$\sigma_{13}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.2\ 2.1\ 2.1)$$

$$\sigma_{13}(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{13}(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 2.1)$$

$$\sigma_{13}(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.2\ 2.1\ 2.1)$$

$$\sigma_{13}(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.1\ 2.3\ 2.1)$$

7.11.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(2\ 2\ 2)$

$$\sigma_{14}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (2.2\ 2.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{14}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (2.2\ 2.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{14}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 2.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{14}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.2\ 2.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{14}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 2.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{14}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 2.2\ 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (2.2 2.2 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 2.2)$$

$$\sigma_{14} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 2.2)$$

$$7.12. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{15} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.2 2.2 2.2)$$

$$\sigma_{15} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.2 2.2 2.2)$$

$$\sigma_{15} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.2 2.2 2.3)$$

$$\sigma_{15} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 2.2 2.2)$$

$$\sigma_{15} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.2 2.2 2.3)$$

$$\sigma_{15} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.2 2.3 2.3)$$

$$\sigma_{15} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 2.2 2.2)$$

$$\sigma_{15} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.2 2.2 2.3)$$

$$\sigma_{15} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.2 2.3 2.3)$$

$$\sigma_{15} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 2.3)$$

$$7.13. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{16} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (2.2 3.2 2.2)$$

$$\sigma_{16} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (2.2 3.2 2.3)$$

$$\sigma_{16} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (2.2 3.2 2.2)$$

$$\sigma_{16} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (2.2 3.3 2.3)$$

$$\sigma_{16} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (2.2 3.3 2.2)$$

$$\sigma_{16} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 3.2 2.2)$$

$$\sigma_{16} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (2.3 3.3 2.3)$$

$$\sigma_{16} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (2.3 3.3 2.2)$$

$$\sigma_{16} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (2.3 3.2 2.2)$$

$$\sigma_{16} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 3.2 2.2)$$

7.14.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(2\ 3\ 3)$

$\sigma_{17}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (3.2\ 3.2\ 2.2)$   
 $\sigma_{17}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (3.2\ 3.2\ 2.3)$   
 $\sigma_{17}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (3.2\ 3.2\ 2.3)$   
 $\sigma_{17}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (3.2\ 3.3\ 2.3)$   
 $\sigma_{17}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3.2\ 3.3\ 2.3)$   
 $\sigma_{17}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (3.2\ 3.3\ 2.3)$   
 $\sigma_{17}(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (3.3\ 3.3\ 2.3)$   
 $\sigma_{17}(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 3.3\ 2.3)$   
 $\sigma_{17}(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 3.3\ 2.3)$   
 $\sigma_{17}(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 3.3\ 2.3)$

7.15.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(3\ 1\ 1)$

$\sigma_{18}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (1.3\ 1.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{18}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 1.3\ 3.1)$   
 $\sigma_{18}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 1.3\ 3.1)$   
 $\sigma_{18}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 1.1\ 3.1)$   
 $\sigma_{18}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 1.1\ 3.1)$   
 $\sigma_{18}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 1.3\ 3.1)$   
 $\sigma_{18}(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.1\ 1.1\ 3.1)$   
 $\sigma_{18}(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.1\ 1.1\ 3.1)$   
 $\sigma_{18}(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.1\ 1.1\ 3.1)$   
 $\sigma_{18}(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.1\ 1.1\ 3.1)$

7.16.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(3\ 1\ 3)$

$\sigma_{19}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (3.3\ 1.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{19}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (3.3\ 1.3\ 3.1)$   
 $\sigma_{19}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 1.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{19}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (3.3\ 1.1\ 3.1)$   
 $\sigma_{19}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 1.1\ 3.3)$   
 $\sigma_{19}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 1.3\ 3.3)$

$\sigma_{19} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 1.1 3.1)$   
 $\sigma_{19} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.1 1.1 3.3)$   
 $\sigma_{19} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.1 1.3 3.3)$   
 $\sigma_{19} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 1.3 3.3)$

7.17.  $(1 2 3)$   
 $(3 2 2)$

$\sigma_{20} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (2.3 2.3 3.3)$   
 $\sigma_{20} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (2.3 2.3 3.2)$   
 $\sigma_{20} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (2.3 2.3 3.2)$   
 $\sigma_{20} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (2.3 2.2 3.2)$   
 $\sigma_{20} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (2.3 2.2 3.2)$   
 $\sigma_{20} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (2.3 2.2 3.2)$   
 $\sigma_{20} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (2.2 2.2 3.2)$   
 $\sigma_{20} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 3.2)$   
 $\sigma_{20} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 3.2)$   
 $\sigma_{20} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (2.2 2.2 3.2)$

7.18.  $(1 2 3)$   
 $(3 2 3)$

$\sigma_{21} (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.3 2.3 3.3)$   
 $\sigma_{21} (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.3 2.3 3.2)$   
 $\sigma_{21} (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 3.3)$   
 $\sigma_{21} (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.3 2.2 3.2)$   
 $\sigma_{21} (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.3 2.2 3.3)$   
 $\sigma_{21} (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 3.3)$   
 $\sigma_{21} (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 2.2 3.2)$   
 $\sigma_{21} (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.2 2.2 3.3)$   
 $\sigma_{21} (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.2 2.3 3.3)$   
 $\sigma_{21} (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 2.3 3.3)$

7.19.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(3\ 3\ 1)$

$\sigma_{22}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.1)$   
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.1)$   
 $\sigma_{22}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.1\ 3.1)$   
 $\sigma_{22}(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{22}(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.3\ 3.1)$   
 $\sigma_{22}(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 3.1\ 3.1)$   
 $\sigma_{22}(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.1\ 3.1\ 3.1)$

7.20.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(3\ 3\ 2)$

$\sigma_{23}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.2)$   
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.2)$   
 $\sigma_{23}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.2\ 3.2)$   
 $\sigma_{23}(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.3)$   
 $\sigma_{23}(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.3\ 3.2)$   
 $\sigma_{23}(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.3\ 3.2\ 3.2)$   
 $\sigma_{23}(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (2.2\ 3.2\ 3.2)$

7.21.  $(1\ 2\ 3)$   
 $(3\ 3\ 3)$

$\sigma_{24}(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 1.3)$   
 $\sigma_{24}(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 1.3)$   
 $\sigma_{24}(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 1.3)$   
 $\sigma_{24}(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 1.3)$   
 $\sigma_{24}(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 1.3)$   
 $\sigma_{24}(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (3.3\ 2.3\ 1.3)$



$\sigma_{24} (3.2.2.2.1.2) \rightarrow (3.3.2.3.1.3)$   
 $\sigma_{24} (3.2.2.2.1.3) \rightarrow (3.3.2.3.1.3)$   
 $\sigma_{24} (3.2.2.3.1.3) \rightarrow (3.3.2.3.1.3)$   
 $\sigma_{24} (3.3.2.3.1.3) \rightarrow (3.3.2.3.1.3)$

## 8. Semiotische Loops

Wie wir gezeigt haben, bilden die semiotischen Quasigruppen  $(PZ, \circ_1)$ ,  $(PZ, \circ_2)$  und  $(PZ, \circ_3)$  abelsche Gruppen, die Quasigruppen  $(PZ, \circ_4)$ ,  $(PZ, \circ_5)$  und  $(PZ, \circ_6)$  Loops, während  $(PZ, \circ_1)$  bis  $(PZ, \circ_{12})$  "gewöhnliche" Quasigruppen sind. Da alle abelschen Gruppen ebenfalls Loops sind, prüfen wir im folgenden, ob sie auch Moufang-Loops sind, d.h. ob sie die drei Moufang-Identitäten (vgl. z.B. Goodaire, May und Raman 1999) erfüllen:

$((x \circ y)x)z = x(y(x \circ z))$       linke Moufang-Identität  
 $((x \circ y)z)y = x(y(z \circ y))$       rechte Moufang-Identität  
 $(x \circ y)(z \circ x) = (x(y \circ z))x$       mittlere Moufang-Identität

Wenn wir  $x = 1$ ,  $y = 2$  und  $z = 3$  setzen, erhalten wir für  $(PZ, \circ_1)$ ,  $(PZ, \circ_2)$  und  $(PZ, \circ_3)$ :  $((1 \circ 2)1)3 = 1 = 1(2(1 \circ 3))$ ;  $((1 \circ 2)3)2 = 2 = 1(2(3 \circ 2))$ ;  $(1 \circ 2)(3 \circ 1) = 1 = (1(2 \circ 3))1$ .

Erfüllt ein Loop ausserdem die Bedingungen

$(x(y \circ x))z = x(y(x \circ z))$       linke Bol-Identität  
 $((x \circ y)z)y = x((y \circ z)y)$       rechte Bol-Identität,

so heisst er Bolscher Loop (Pflugfelder 1990, S. 112). Wir setzen wieder  $x = 1$ ,  $y = 2$  und  $z = 3$  und erhalten für  $(PZ, \circ_1)$ ,  $(PZ, \circ_2)$  und  $(PZ, \circ_3)$ :  $(1(2 \circ 1))3 = 1 = 1(2(1 \circ 3))$ ;  $((1 \circ 2)3)2 = 2 = 1((2 \circ 3)2)$ .

Ein Bolscher Loop  $(B, \circ)$ , der 1.  $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$  erfüllt und 2. für den gilt  $x \rightarrow x \circ x$  ist eine Bijektion, heisst Bruckscher Loop (Pflugfelder 1990, S. 120). Hierzu brauchen wir nur 1. zu zeigen: Wir setzen wieder  $x = 1$ ,  $y = 2$  und  $z = 3$  und erhalten für  $(PZ, \circ_1)$ ,  $(PZ, \circ_2)$  und  $(PZ, \circ_3)$ :  $(1 \circ 2)^{-1} = 1^{-1} \circ 2^{-1} = 3$ ;  $(1 \circ 3)^{-1} = 1^{-1} \circ 3^{-1} = 2$ ;  $(2 \circ 3)^{-1} = 2^{-1} \circ 3^{-1} = 1$ .

Semiotische Gruppen sind also zugleich Moufangsch, Bolsch und Brucksch.

Ferner können wir feststellen, dass die kommutativen Quasigruppen  $(PZ, \circ_4)$ ,  $(PZ, \circ_5)$  und  $(PZ, \circ_6)$  totalsymmetrisch sind, da sie die Bedingungen 1.  $x \circ y = y \circ x$  und 2.  $x(x \circ y) = y$  erfüllen. Da 1. klar ist, zeigen wir 2.: Für  $(PZ, \circ_4)$  bis  $(PZ, \circ_6)$  bekommen wir dann:  $1(1 \circ 2) = 2$ ,  $2(2 \circ 3) = 3$ ,  $3(3 \circ 2) = 2$ ,  $3(3 \circ 1) = 1$ , usw. Es handelt sich bei den kommutativen Quasigruppen also um Steiner-Loops (Pflugfelder 1990, S. 123).

## 9. Quasigruppentheoretische Konstruktionen

Die für die mathematische Semiotik wichtige Frage, ob es möglich sei, mittels kommutativer oder sogar nichtkommutativer Quasigruppen, also mit Loops, welche nicht Moufangsch sind, oder sogar mit Nicht-Loop-Gebilden, ebenfalls Zeichenklassen und Realitätsthematiken zu konstruieren, musste in Toth (2008a, S. 46) offen bleiben. Immerhin konnte festgehalten werden, dass alle semiotischen Quasigruppen, welche nicht Gruppen sind, nicht-assoziativ sind, ferner gibt es natürlich kommutative und nichtkommutative Quasigruppen, was also an die entsprechenden Verhältnisse in den Zahlbereichen erinnert:

| Zahlbereiche | strukturelle Eigenschaften |                 | Gruppoide                |
|--------------|----------------------------|-----------------|--------------------------|
| <b>R, C</b>  | kommutativ                 | assoziativ      | (abelsche) Gruppen       |
| <b>H</b>     | nichtkommutativ            | assoziativ      | ?                        |
| <b>O</b>     | nichtkommutativ            | nichtassoziativ | nichtkommutative         |
| Quasigruppen |                            |                 |                          |
| ?            | kommutativ                 | nichtassoziativ | kommutative Quasigruppen |

So entsprechen also die Moufang-Loops qua Gruppen den Körpern der reellen und der komplexen Zahlen. Eine gruppentheoretische Korrespondenz der Quaternionen könnten die nicht-abelschen Gruppen sein. Mit den Oktonionen korrespondieren die nichtkommutativen Quasigruppen, die keine Loops darstellen. Doch welcher Zahlbereich entspricht den kommutativen Quasigruppen (Loops)?

Obwohl diese Zusammenhänge weiter offen bleiben müssen, hat die vorliegende Studie folgende Zusammenhänge ergeben, die wir in Form von drei semiotischen Theoremen festhalten wollen:

**Theorem 1:** Die symplektischen quasigruppentheoretischen Operationen  $\sigma_4$  -  $\sigma_{12}$  erzeugen die semiotischen Sinnklassen, d.h. die Menge der 473 semiotischen Relationen, bei denen weder die semiotische inklusive Ordnung noch die paarweise Verschiedenheit der Relata gefordert wird.

**Theorem 2:** Die symplerotischen gruppentheoretischen Operationen  $\sigma_1 - \sigma_3$  erzeugen die semiotischen Bedeutungsklassen, d.h. die Menge der 27 semiotischen Relationen, bei denen die paarweise Verschiedenheit der Relata, nicht aber die semiotische inklusive Ordnung gefordert wird.

**Theorem 3:** Die symplerotische gruppentheoretische Operation  $\sigma_2$  erzeugt die 10 Zeichenklassen, bei denen sowohl die paarweise Verschiedenheit der Relata als auch die semiotische inklusive Ordnung gefordert wird.

Semiotische Anwendung im Sinne der gruppentheoretischen Theorie dyadischer Verknüpfungen bzw. Zuordnungen von semiotischen Elementen (Primzeichen, Subzeichen, Zeichenrümpfen, Zeichenklassen, Realitätsthematiken, Trichotomischen Triaden etc.) dürfte damit selber ebenso anwendbar als auch weiterhin theoretisch ausbaubar sein.

### Bibliographie

- Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975  
Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986  
Bense, Max/Walter, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973  
Bogarin, Jorge, Symplerosis. Über komplementäre Zeichen und Realitäten. In: Semiosis 65-68, 1992, S. 87-94  
Gfesser, Karl, Bemerkungen zum "Zeichenband". In: Walther, Elisabeth und Bayer, Udo (Hrsg.), Zeichen von Zeichen für Zeichen. Baden-Baden 1990, S. 129-141  
Goodaire, Edgar G./May, Sean/Raman, Maitreyi, The Moufang Loops of Order Less Than 64. New York 1999  
Lindner, Charles C./Evans, Trevor, Finite Embedding Theorems for Partial Desings and Algebras. Québec 1977  
Pflugfelder, Hala O., Quasigroups and Loops. Berlin 1990  
Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2007 (2. Aufl. 2008a)  
Toth, Alfred, Gruppentheoretische Semiotik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Gruppenth.%20Sem..pdf> (2008b)

## Abstrakte und konkrete Zeichen

1. Ein abstraktes Zeichen ist eine der 10 Peirceschen Zeichenrelationen, deren allgemeine Form bekanntlich

$$ZR = (3.a \ 2.b \ 1.c)$$

ist. Diese auch Zeichenschema genannte triadische Relation wird nach Bense (1986, S. 129) durch Modelle, d.h. konkrete Zeichen, erfüllt oder nicht erfüllt. Es ist eine in der Semiotik nie beantwortete Frage, ob jedes konkrete Zeichen als Modell für jede Zeichenrelation dienen kann oder nicht. Diese Frage dürfte letztendlich – wenn auch unter noch nicht völlig geklärten Umständen – darauf hinaus laufen, ob es wahr sei, dass wirklich „jedes beliebige Etwas“ zum Zeichen erklärt werden könne, wie es Benses Axiom behauptet (Bense 1967, S. 9). Immerhin scheint die Evidenz einer solchen Möglichkeit schon deshalb zu widersprechen, weil ZR durch Einsetzen von semiotischen Werten für die Variablen a, b, c als zehn verschiedene Zeichenklassen auftreten kann. Es scheint also so, als ob nicht jedes konkrete Zeichen als Modell für jede Zeichenrelation dienen kann. Daraus folgt natürlich, dass es viel mehr konkrete als abstrakte Zeichen gibt. Es folgt aber nach Massgabe der bisherigen formalen Mittel der Semiotik daraus auch, dass es bisher keine Möglichkeit gibt, konkrete Zeichen in der Form von Relationen bzw. Schemata darzustellen.

2. Ein konkretes Zeichen unterscheidet sich von seinem abstrakten Zeichen dadurch, dass sein Zeichenträger, das materiale Mittel  $m$ , Teil der konkreten Zeichenrelation ist:

$$KZ = (m, M, O, I)$$

$m$  selber ist dabei als „triadisches Objekt“ zu bestimmen: „Wenn mit Peirce ein Zeichen ein beliebiges Etwas ist, das dadurch zum Zeichen erklärt wird, dass es eine triadische Relation über M, O und I eingeht, so ist zwar das Zeichen als solches eine triadische Relation, aber der Zeichenträger ein triadisches Objekt, ein Etwas, das sich auf drei Objekte (M, O und I) bezieht“ (Bense/Walther 1973, S. 71). Wir haben also

$(m \subset M)$

$(m \subset O)$

$(m \subset I)$

Nun ist aber der Zeichenträger kraft seiner Materialität selber ein Teil der objektiven Welt, in der sich auch das Objekt befindet, das qua Meta-Objekt (Bense 1967, S. 9) zum Zeichen erklärt wird, d.h. wir haben

$(m \subset \Omega)$ .

Damit ist aber

$KZ = ((m \subset \Omega), M, O, I)$ ,

d.h. nicht nur  $m$ , sondern auch  $\Omega$  ist ein triadisches Objekt sein, denn eine Teilmenge einer Menge kann höchstens die gleiche Stelligkeit wie ihre Menge haben. Und falls die Menge eine höhere Stelligkeit als ihre Teilmenge hat, ist sie nach Peirce auf eine triadische Stelligkeit, d.h. die Stelligkeit von  $m$ , reduzierbar (vgl. Walther 1989, S. 298).

Allerdings hatten wir in Toth (2009) ferner gezeigt, dass auch

$(I \subset \mathcal{J})$

gilt. Damit erhalten wir schliesslich

$KZ = ((m \subset \Omega), M, O, (I \subset \mathcal{J}))$ ,

d.h. KZ ist nun eine triadischen Relation mit den bekannten drei semiotischen Partialrelationen M, O und I, darüber hinaus aber auch den drei triadischen Objekten  $m$ ,  $\Omega$  und  $\mathcal{J}$ , d.h. KZ enthält neben den abstrakten semiotischen Kategorien zu jeder Kategorie auch ihr konkretes ontologisches Korrelativ.

3. Damit bekommen wir folgende Möglichkeiten erweiterter Zeichenrelationen

3.1. KZ = ( $\mathcal{M}$ , M, O, I)

Wie bereits gesagt, handelt es sich bei KZ wegen der Präsenz von  $\mathcal{M}$  um ein konkretes Zeichen im Gegensatz zum abstrakten Zeichen ZR = (M, O, I).

3.2. PZ1 = ( $\Omega$ , M, O, I)

Hier liegt ein Zeichen vor, welches das Objekt, welches es substituiert bzw. (als Meta-Objekt) repräsentiert, selbst enthält. In PZ1 ist somit die Kontexturengrenze zwischen Zeichen und Objekt aufgehoben, d.h. es liegt hier ein erster Typ eines polykontexturalen Zeichens vor.

3.3. PZ2 = ( $\mathcal{J}$ , M, O, I)

Hier haben wir ein Zeichen, welches den Interpreten enthält, der es als Substitut bzw. Repräsentanten für ein Objekt thetisch einführt. Auch in PZ2 ist somit eine Kontexturengrenze durchbrochen, zwar nicht diejenige zwischen Zeichen und Objekt, aber diejenige zwischen Zeichen und Zeichensetzer. Hier liegt also ein zweiter Typ eines polykontexturalen Zeichens vor.

Da  $\mathcal{M}$ ,  $\Omega$  und  $\mathcal{J}$  triadische Objekte sind, können wir auch die Kombinationen betrachten:

3.4. KPZ1 = ( $\mathcal{M}$ ,  $\Omega$ , M, O, I)

Dieses ist das konkrete Gegenstück von PZ1, denn die Präsenz des Zeichenträger  $\mathcal{M}$  bedeutet immer eine Konkretisierung, d.h. Realisierung oder Manifestierung eines abstrakten Zeichens.

$$3.5. = \text{PZ12} = (\Omega, \mathcal{J}, M, O, I)$$

Dieses Zeichen ist die Vereinigung der abstrakten Zeichenrelation ZR mit beiden von ihm aus gesehen transzendenten (d.h. polykontexturalen) Kategorien. PZ12 enthält also nicht nur das von ZR substituierte bzw. repräsentierte Objekt, sondern sogar den Zeichensetzer.

$$3.6. \text{KPZ2} = (\mathcal{m}, \mathcal{J}, M, O, I)$$

Dieses ist die Konkretisierung (Realisierung, Manifestierung) von PZ2.

$$3.7. \text{KPZ12} = (\mathcal{m}, \Omega, \mathcal{J}, M, O, I)$$

Dieses ist die Konkretisierung (Realisierung, Manifestierung) von PZ12.

4. Nachdem wir nun alle möglichen Kombinationen konkreter und abstrakter Zeichenrelationen dargestellt haben, interessieren uns einige Übergänge zwischen konkreten und abstrakten Zeichen. Hier können wir im Anschluss an das letzte Kapitel die folgenden Haupttypen unterscheiden:

$$4.1. \mathcal{m} \rightarrow (M, O, I)$$

Ein Zeichenträger wird zur abstrakten Zeichenrelation. Dies bedeutet, dass eine abstrakte Zeichenrelation in ihrem Zeichenträger verschwindet. Dies ist z.B. bei antiken unentzifferten Inschriften der Fall.

$$4.2. \Omega \rightarrow (M, O, I)$$

Das substituierte Objekt ersetzt die Zeichenrelation. Dies ist der formale Hintergrund für die bekannte Darstellung von „lebendig werdenden“ Bildern oder Statuen wie dem Pygmalion-Motiv.

#### 4.3. $\mathcal{J} \rightarrow (M, O, I)$

Dieser komplizierte Fall würde z.B. für Oscar Wilde's „The Picture of Dorian Gray“ bedeuten, dass nicht Dorians Bild lebendig würde, sondern dass sein Schöpfer, der Maler Basil Hallward, all die seltsamen Ereignisse zu erleben hätte, die im Roman Dorian zu erleben hat.

Auch hier können wir wieder die Haupttypen der Kombinationen betrachten, für die sich nach unseren bisherigen Erläuterungen leicht Beispiele, d.h. Modelle finden:

$$4.4. \mathcal{M}, \Omega \rightarrow (M, O, I)$$

$$4.5. \Omega, \mathcal{J} \rightarrow (M, O, I)$$

$$4.6. \mathcal{M}, \mathcal{J} \rightarrow (M, O, I)$$

$$4.7. \mathcal{M}, \Omega, \mathcal{J} \rightarrow (M, O, I)$$

### **Bibliographie**

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Toth, Alfred, Das Zeichen als Fragment. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

Walther, Elisabeth, Charles Sanders Peirce – Leben und Werk. Baden-Baden 1989



## Die Transformation eines Objektbezugs in einen Interpretationszusammenhang

1. In Benses letztem zu seinen Lebzeiten veröffentlichten semiotischen Buch liest man: „Die erste Phase der Bildung der Zeichenrelation betrifft also die Disponibilität des möglichen Materials (der Wahrnehmung), die zweite Phase die Faktizität des relevanten Objekts (der Erfahrung) und die dritte Phase die Transformation dieses Objektes in einen begrifflich rekonstruierbaren, also intelligiblen Interpretationszusammenhang“ (1986, S. 57).

2. Benses setzt, obwohl er stets von der einfachen Peirceschen Zeichenrelation  $ZR = (M, O, I)$  ausgeht, eine erweiterte Zeichenrelation der Form

$$KZ = (\mathcal{M}, M, O, I)$$

mit integriertem Zeichenträger  $\mathcal{M}$  voraus, denn im Gegensatz zu diesem ist der Bezug des Mittels natürlich nicht material. Ferner kann Bense nur deshalb von der „Faktizität des Objekts (der Erfahrung)“, d.h. von einem ontischen, nicht intelligiblen oder idealen Objekt sprechen, weil, wie ich in Toth (2009) gezeigt habe,

$$(\mathcal{M} \subset \Omega)$$

gilt. Was schliesslich Benses „Transformation dieses Objektes in einen intelligiblen Interpretationszusammenhang“ betrifft, so setzt kann dieser natürlich nur von einem Zeichensetzer  $\mathcal{J}$  über der Objektrelation  $(M \rightarrow O)$  konnexiv gebildet werden, d.h es gilt ferner

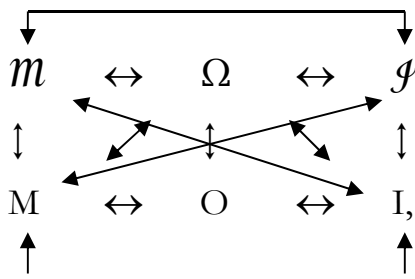
$$(I \subset \mathcal{J}).$$

Nun ist der drittheitliche Interpretationszusammenhang als triadische Relation nichts anderes als das Zeichen selbst (vgl. Buczynska-Garewicz 1976). D.h. aber, Benses obige

Bestimmung setzt neben der Peirceschen Zeichenrelation ZR die folgende Objektrelation

$$\text{OR} = (\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{J})$$

voraus. Ferner müssen OR und ZR in einer korrelativen Relation stehen, d.h. es entsprechen sich natürlich die ontologischen und die semiotischen Kategorien wie folgt:  $\mathcal{M} \sim M, \Omega \sim O$  und  $I \sim \mathcal{J}$ . Damit bekommen wir ein komplexes Schema der möglichen Partialrelationen zwischen den beiden Mengen von Kategorien, das wir wie folgt darstellen können:



3. Aus diesen 12 Partialrelationen (sowie ihren Konversen) können wir nun alle möglichen Transformationen eines Objektbezugs in einen Interpretationszusammenhang bestimmen, indem wir diejenigen unter diesen Partialrelationen, welche entweder das Objekt  $\Omega$  oder den Objektbezug O sowie entweder den Interpreten  $\mathcal{J}$  oder den Interpretantenbezug I betreffen, dadurch bestimmen, dass wir sie in der Form von Paaren von dyadischer Relationen definieren:

- |    |                                    |                        |     |                                   |                        |
|----|------------------------------------|------------------------|-----|-----------------------------------|------------------------|
| 1. | $(O \rightarrow I)$                | $= \{((2.b), (3.a))\}$ | 1°. | $(O \leftarrow I)$                | $= \{((3.a), (2.b))\}$ |
| 2. | $(\Omega \rightarrow I)$           | $= \{((2.b), (3.a))\}$ | 2°. | $(\Omega \leftarrow I)$           | $= \{((3.a), (2.b))\}$ |
| 3. | $(\Omega \rightarrow \mathcal{J})$ | $= \{((2.b), (3.a))\}$ | 3°. | $(\Omega \leftarrow \mathcal{J})$ | $= \{((3.a), (2.b))\}$ |
| 4. | $(O \rightarrow \mathcal{J})$      | $= \{((2.b), (3.a))\}$ | 4°. | $(O \leftarrow \mathcal{J})$      | $= \{((3.a), (2.b))\}$ |

Die entsprechenden Mengen sind also in aufzählender Form:

$M(1) = \{((2.1), (3.1)), ((2.1), (3.2)), ((2.1) (3.3)), ((2.2), (3.1)), ((2.2), (3.2)), ((2.2), (3.3)), ((2.3), (3.1)), ((2.3), (3.2)), ((2.3), (3.3))\}$

$M(2) = \{((2.1), (3.1)), ((2.1), (3.2)), ((2.1) (3.3)), ((2.2), (3.1)), ((2.2), (3.2)), ((2.2), (3.3)), ((2.3), (3.1)), ((2.3), (3.2)), ((2.3), (3.3))\}$

$M(3) = \{((2.1), (3.1)), ((2.1), (3.2)), ((2.1) (3.3)), ((2.2), (3.1)), ((2.2), (3.2)), ((2.2), (3.3)), ((2.3), (3.1)), ((2.3), (3.2)), ((2.3), (3.3))\}$

$M(4) = \{((2.1), (3.1)), ((2.1), (3.2)), ((2.1) (3.3)), ((2.2), (3.1)), ((2.2), (3.2)), ((2.2), (3.3)), ((2.3), (3.1)), ((2.3), (3.2)), ((2.3), (3.3))\}$

## **Bibliographie**

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Buczynska-Garewicz, Hanna, Der Interpretant, die Autoreproduktion des Symbols und die pragmatische Maxime . In: Semiosis 2, 1976, S. 10-17

Toth, Alfred, Das Zeichen als Fragment. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

# Ein vollständiges graphentheoretisches Modell des semiotischen Universums I

1. Das semiotische Universum lässt sich durch die Peircesche abstrakte Zeichenrelation

$$ZR = (M, O, I)$$

nicht vollständig beschreiben, denn im Gegensatz zu Bense (1983, S. 17 ff.), aber im Einklang mit Bense (1975, S. 45 f., 65 f. [sowie weiteren weiten Teilen dieses grossartigen Buches]) gibt es keine Semiose, die so verläuft:

$$\Omega \rightarrow ZR \text{ (Bense 1967, S. 9),}$$

sondern zwischen  $\Omega$  und ZR gibt es noch die Ebene der „disponiblen“ Kategorien

$$DR = (M^\circ, O^\circ, I^\circ),$$

und ferner setzt  $\Omega$ , da es von Bense (1973, S. 71) ausdrücklich als „triadisches Objekt“ bestimmt wird, eine triadische Objektrelation

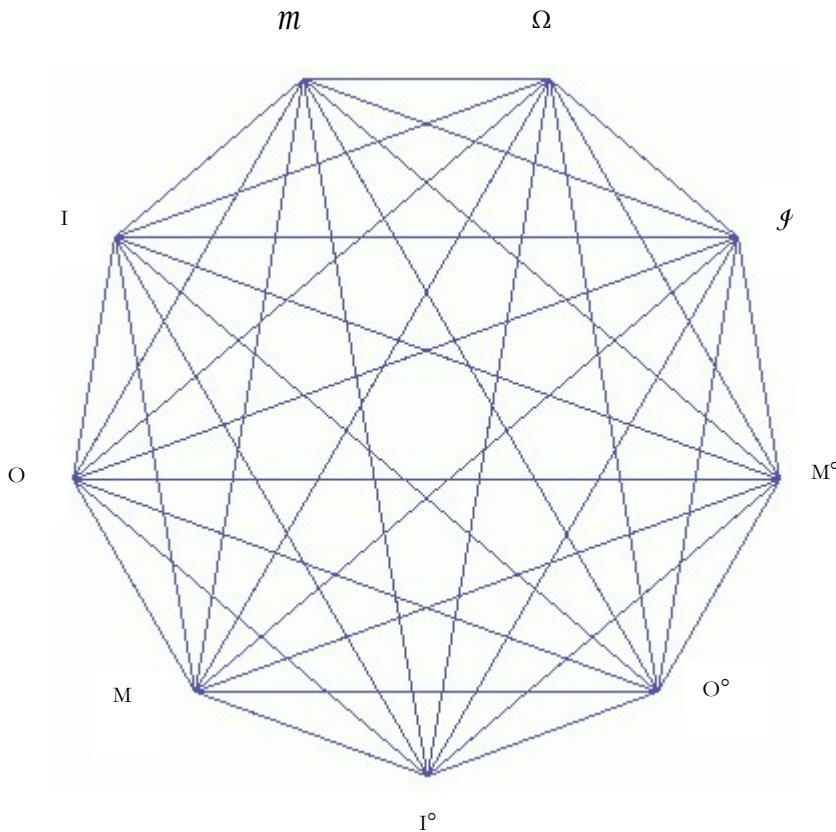
$$OR = (\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{I})$$

voraus. Sozusagen als Lemma könnte man ergänzen, dass auch die von Bense eingeführte „effektive Zeichenrelation“ (Bense 1975, S. 94 ff.) nicht auf der abstrakten, sondern auf einer konkreten Zeichenrelation beruht, die über einen materialen Zeichenträger verfügt, d.h.

$$KZ = (\mathcal{M}, M, O, I) \text{ (Toth 2009).}$$

Daraus folgt also, dass das semiotische Universum zu seiner Beschreibung nicht nur ZR, sondern auch OR und DR benötigt. Da ferner alle drei Relationen triadisch sind, haben wir also 3 semiotische, 3 ontologische und 3 disponible Kategorien vor uns, die

in der theoretischen ebenso wie in der realen Semiose miteinander vielfältigste Relationen und „Verflechtungen“ eingehen, deren Untersuchung besonders im dünnnetzwerkigen Niemandsland zwischen Objekt und Zeichen natürlich interessiert. In dieser ersten Pilotstudie sei das folgende graphentheoretische Modell vorgeschlagen, ein Neuneck, in das sämtliche Relationen zwischen sämtlichen 9 Kategorien und damit sämtliche Überschneidungen eingezeichnet sind:



## Bibliographie

- Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967  
 Bense, Max, Semiotische Prozesse und systeme. Baden-Baden 1975  
 Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1983  
 Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973  
 Toth, Alfred, Abstrakte und effektive Zeichenrelation. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

## Bedeutung als tetradische Relation

1. Ein in der Logik wenig, in der Semiotik gar nicht beachteter hoch interessanter Vorschlag zur Definition von Bedeutung als vierstelliger Relation findet sich in Menne (1992, S. 55):

$B(a, l, g, x)$ ,

wobei B für Bedeutung, a für Name, l für eine Sprache l, g für Gehalt oder Gemeintes und x für Ding steht. Wir ergänzen Mennes Ausführungen wie folgt: Zunächst untersuchen wir die Partialrelationen von 4B hinsichtlich ihrer semiotischen Relevanz:

1.1.  $(a \leftrightarrow l)$

Namen sind nur in bestimmten Sprachen definiert. Diese Partialrelation ist nicht Teil irgendeiner mir bekannten Semiotik, wird aber „stillschweigend vorausgesetzt“. Menne gibt folgende Beispiele: Dt. „das“ ist im Dt. der neutrale Artikel, im Lat. bedeutet es „du gibst“. Dt. „rot“ ist eine Farbbezeichnung, bezeichnet aber im Engl. „faulen“ oder „Fäulnis“. Schmerz ist im Dt. ein sinnvoller Name, im Franz. u.a. aber sinnlos.

1.2.  $(a \leftrightarrow g)$

Dies ist die inverse Gebrauchsrelation, die von mir so genannte Applikationsrelation, sowie die Gebrauchsfunktion der Semiotik:  $(M \rightarrow I)$ ,  $(M \leftarrow I)$ .

1.3.  $(a \leftrightarrow x)$

Dies ist die Bezeichnungsfunktion und ihre Konverse:  $(M \rightarrow O)$ ,  $(M \leftarrow O)$ .

#### 1.4. ( $l \leftrightarrow g$ )

Dies ist die Relation zwischen der Sprache, in der die Zeichen definiert oder nicht definiert sind und ihrem Gemeintem, d.h. den Interpretantenbezügen, sowie der Konversen.

#### 1.5. ( $l \leftrightarrow x$ )

Hier haben wir die Relation und ihre Konverse zwischen einer Sprache und den (bezeichneten) Objekten bzw. Dingen.

#### 1.6. ( $g \leftrightarrow x$ )

Dies ist die Relation zwischen dem Gemeintem und dem Ding.

2. Menne (1992, S. 56) definiert nun auf der Basis von zwei Bedeutungsrelationen

$${}^4B(a, l, f, x) \text{ und } {}^4C(b, k, g, y)$$

durch Zusammenfassung die neue Relation

$${}^8D(a, b, l, k, f, g, x, y)$$

Wenn man sich auf eine einzige Sprache beschränkt, ist  $l = k$ , und man bekommt

$${}^7D(a, b, l, f, g, x, y).$$

Damit kann Menne nun zwei Basisbegriffe der semiotischen Logik definieren, nämlich Univozität und Äquivozität:

2.1. Univozität:  $a = b, f = g, x \neq y$ .

Beispiel: vierfüßig(x) = Kuh, vierfüßig(y) = Tisch.

2.2. Äquivozität:  $a = b, f \neq g, x \neq y$ .

Beispiel: wagen(x) = Auto, Karren, wagen(y) = riskieren.

Logisch unterscheiden sich die beiden Begriffe also dadurch, dass bei der Äquivalenz neben den Objekten auch noch das jeweils Gemeinte verschieden ist. Semiotisch sind also neben den Objektbezügen auch die Interpretantenbezüge verschieden. Gemeinsam haben die beiden Fälle also nur, dass ihre Mittelbezüge identisch sind.

3. Abgesehen davon, dass die Sprache, d.h. das Repertoire selbst, in die Zeichendefinition hineingenommen wird, bringt also die logische Semiotik nicht viel Neues. Allerdings kann das weitere Relatum L „Sprache“ einen entscheidenden Schritt in Richtung der von Bense (1986, S. 129) geforderten semiotischen Modelltheorie bedeuten. Wenn wir also

$$B(a, l, g, x)$$

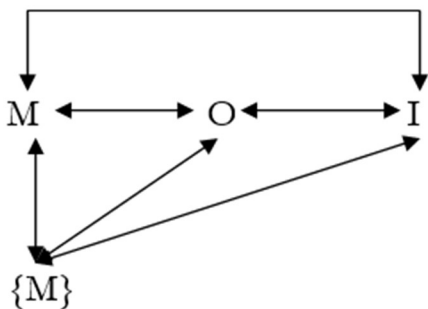
als tetradische semiotische Relation definieren wollen, bekommen wir

$$ZRL = (\{M\}, M, O, I).$$

Die Korrespondenzen der jeweiligen Partialrelationen von B bzw. von ZRL sind dann:

1.  $R(a, l) \leftrightarrow \Sigma(M, \{M\}) = (M \leftrightarrow \{M\})$
2.  $R(a, g) \leftrightarrow \Sigma(M, \{O, I\}) = (M \leftrightarrow (O \leftrightarrow I))$
3.  $R(a, x) \leftrightarrow \Sigma(M, O) = (M \leftrightarrow O)$
4.  $R(l, g) \leftrightarrow \Sigma(\{M\}, (O, I)) = (\{M\} \leftrightarrow (O \leftrightarrow I))$
5.  $R(l, x) \leftrightarrow \Sigma(\{M\}, O) = (\{M\} \leftrightarrow O)$
6.  $R(g, x) \leftrightarrow \Sigma((O, I), O) = ((O \leftrightarrow I) \leftrightarrow O),$

graphisch dargestellt:





Falls nun eine Semiotik nur über ein einziges Repertoire verfügt, d.h. falls man in der ihr korrespondierenden Logik von der 7-stelligen statt einer 8-stelligen Relation ausgeht, gilt darüber hinaus notwendig

$$M \in \{M\},$$

d.h. ein Zeichen als Mittel ist genau dann definiert, wenn diese Beziehung gilt, und nicht, falls  $M \notin \{M\}$  ist (z.B. im Falle des obigen Beispiels „Schmerz“ im Franz.).

Man könnte hier allerdings noch weiter gehen, denn nach Bense/Walther (1973, S. 84 f.) betrifft ja der semiotische Repertoire-Begriff nicht nur das Mittel-Reperotire, sondern auch den Objektbereich und das Interpretantenfeld, die im immanenten Falle alle als aus dem Mittelrepertoire selektiert verstanden werden. Man kann somit als weitere Kategorie

$$\{x\} \leftrightarrow \{O\}$$

setzen und zwei Bedeutungsrelationen dahin unterscheiden, ob ein  $a$  das gleiche Ding  $x \in \{x\}$  bezeichnet oder nicht. Damit kann man auch zusätzliche Weise sowohl Homonyme als auch Polyseme definieren, die dann zwar als jeweils verschiedene Zeichen, aber doch innerhalb derselben Bedeutungsrelation erscheinen.

Ferner kann man

$$\{g\} \leftrightarrow \{I\}$$

setzen uns so neben den Bezeichnungsfunktionen auch die Bedeutungsfunktionen, d.h. neben den logischen Extensionen auch die Intensionen präziser oder mindestens auf weitere Arten erfassen.

Für „crosslinguistische“ Belange, d.h. Typologie oder Etymologie, kann man sogar ausdrücklich

$$\{l\} \leftrightarrow \{\mathcal{L}\}$$

setzen, d.h. neben  $\{M\}_2$  als weitere Kategorien  $\{M_2, \{M\}_3, \dots, \{M\}_n$  einführen. Die Abbildungsbeziehungen zwischen einem  $a$  bzw.  $M \in \{\{M\}_i\}$  könnten dann dazu benutzt werden, die Lautgesetze der historischen Linguistik auf ein nicht-triviales logisch-semiotisches Fundament zurückzuführen. Wir hätten dann am Schluss ein neues Zeichenmodell der Gestalt

$$ZR = (M, O, I, \{M\}, \{O\}, \{I\})$$

mit den Beziehungen

$$M \in \{M\}$$

$$O \in \{O\}$$

$$I \in \{I\}.$$

Daraus könnte man ferner sogar noch räumliche und zeitliche Nähe durch Einführung einer sehr einfachen Topologie definieren:

$$m \in \{M\}$$

$$\Omega \in \{O\}$$

$$\mathfrak{I} \in \{I\}, \text{ usw.}$$

## **Bibliographie**

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Menne, Albert, Einführung in die Methodologie. 3. Aufl. Darmstadt 1992

## Zu einer semiotischen Modelltheorie

1. Zu den Vermächtnissen Max Benses gehörte der Wunsch, es möge eine semiotische Modelltheorie geschaffen werden (Bense 1986, S. 129). Ich kann hier nur einige Hinweise geben, die aber je nachdem weiterverfolgt werden.

2. Menne (1992, S. 56) definierte „Bedeutung“ als Quadrupel

$B(a, l, g, x)$ ,

darin  $a$  für Ausdruck,  $l$  für Sprache,  $g$  für Gehalt (Gemeintes) und  $x$  für ein Ding (Objekt) steht. Wie man leicht erkennt, geht diese Definition insofern über die Definition des Peirceschen Zeichens als triadischer Relation

$ZR = (M, O, I)$

hinaus, als die Sprache bzw. das Repertoire der Mittel  $\{M\}$  im Sinne von  $\{a\}$  bei Menne explizit berücksichtigt wird:

$ZR^* = (\{M\}, M, O, I)$ .

Ist also etwa  $\mathcal{L} = \{M_1\}$  das Lexikon der italienischen Sprache, dann sind z.B. die Wörter „arbre“, „tree“, „Baum“ oder „fa“ dort nicht definiert, d.h. sie stellen in  $\mathcal{L}$  keine Zeichen dar, wogegen das Wort „albero“ in  $\mathcal{L}$  definiert ist, d.h. ein Zeichen in  $\mathcal{L}$  darstellt. Geht man sogar z.B. von

$ZR^{***} = (\{M_1\}, \{M_2\}, \{M_3\}, M, O, I)$

aus, wobei  $\mathcal{L}_1 = \{M_1\} =$  Ungarisch,  $\mathcal{L}_2 = \{M_2\} =$  Französisch,  $\mathcal{L}_3 = \{M_3\} =$  Deutsch seien, dann sind die Wörter  $fa$ ,  $arbre$  und  $Baum$ , nicht aber  $tree$  (und  $albero$ , etc.) in den  $\mathcal{L}_i$ 's definiert.

3. Die Ausdrücke aus  $ZR^*$ ,  $ZR^{**}$ ,  $ZR^{***}$ , ... erfüllen nun, wie man anhand von z.B. Ebbinghaus et al. (1996, S. 35 ff.) nachprüft, die Definitionen der mathematischen Modellbeziehung. Unter einer bewusst etwas von der üblichen, rein mathematischen, abweichende Schreibkonvention wollen hier diese  $ZR^*$ ,  $ZR^{**}$ ,  $ZR^{***}$ , ... wie folgt einführen:

$$\Sigma \mathcal{L}_i = \{(\{M_i\}, M, O, I)\}$$

Ein Zeichen

$$ZR_i = (\{M_i\}, M, O, I)$$

ist dann ein Modell von  $\Sigma \mathcal{L}_i$  gdw gilt:

$$\Sigma \mathcal{L}_i \models_{\mathcal{L}_i} ZR,$$

wobei

$$\mathcal{L} \subset \{\{M_1\}, \{M_2\}, \{M_3\}, \dots, \{M_n\}\}.$$

Nun kann man noch der logischen bzw. modelltheoretischen Erfüllungsbeziehung einen semiotischen Sinn geben: Ein Ausdruck  $\varphi$  heisst erfüllbar ( $\text{Erf } \varphi$ ) gdw es eine Interpretation gibt, die Modell von  $\varphi$  ist. Ein Zeichen ist also z.B. dann erfüllbar, wenn es eine Sprache (bzw. ein Repertoire) gibt, das es enthält. Beispielsweise sind die Zeichen  $lan_i$ ,  $kert$  und  $chog$  erfüllbar in den Lexika des Hawaiianischen, Ungarischen und St. Gallerdeutschen.

## Bibliographie

- Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986  
 Ebbinhaus, Heinz-Dieter et al., Einführung in die Mathematische Logik. 4. Aufl. Heidelberg 1996  
 Menne, Albert, Einführung in die Methodologie. 3. Aufl. Darmstadt 1992

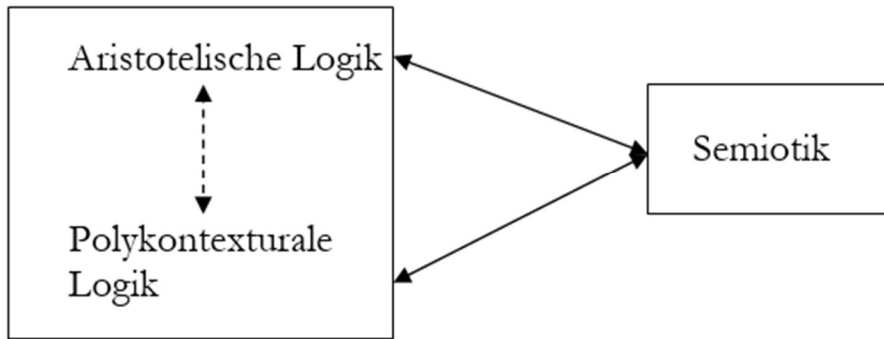
### 3 Arten von semiotischen Zahlen

1. Eines der grossen, bisher ungelösten Probleme nicht nur der Semiotik, sondern logischerweise auch der Wissenschaftstheorie, ist die genaue Position der Semiotik im Haus der Wissenschaften. Während neueste wissenschaftstheoretische Versuche aus dem Blickwinkel der Theoretischen Physik die Semiotik ganz einfach weglassen (Tegmark 2003, S. 12), wird spätestens seit den 60er Jahren behauptet, sie sei die tiefste, fundamentale Repräsentation, die in der Wissenschaft überhaupt möglich sei (vgl. z.B. Bense 1986). Denselben Anspruch hatte aber jahrhundertlang die Logik für sich beansprucht (vgl. z.B. Menne 1991). Für Peirce stellte sich spezifisch die Frage, ob die Logik die Semiotik oder die Semiotik die Logik begründe (vgl. Walther 1979).

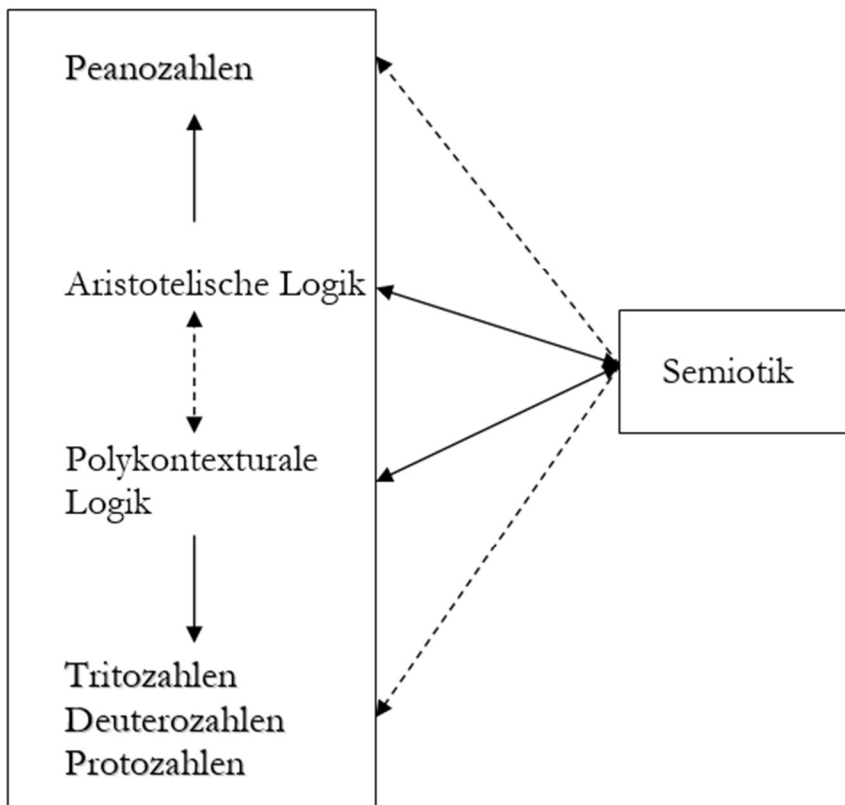
2. Seitdem die von Gotthard Günther entwickelte polykontexturale Logik und Ontologie auch auf die Semiotik wirkt – und das tat sie schon sehr früh, wie eine Anmerkung in Bense (1952, S. 115 [Anm. 72]) beweist, stellt sich die erweiterte Frage nach der Position und „Tiefe“ von Logik, Semiotik und Polykontexturalitätstheorie. Da es der Hauptzweck der Polykontexturalitätstheorie ist, die Logik durch Einführung der Proemialrelation zu unter-gehen, d.h. auf ein noch abstrakteres Fundament zurückzuführen, und da die Proemialrelation die Dichotomie von Zeichen und Objekt aufhebt, weil es sie auf der kenogrammatistischen und morphogrammatistischen Ebene noch gar nicht geben kann, muss zweierlei gefolgert werden:

1. Die Polykontexturalitätstheorie ist ein tieferes Repräsentationssystem als die Theoretische Semiotik.
2. Allerdings wird dieses tiefere Repräsentationssystem durch Aufgabe der Dichotomie von Zeichen und Objekt erkauft, woraus natürlich die Elimination des Zeichenbegriffs folgt.

3. Damit ist zwar immer noch nichts darüber gesagt, ob die Logik der Semiotik primordial sei oder umgekehrt, aber es scheint sich eine Alternative zu diesem Hierarchiedenken abzuzeichnen: Während es ohne Zweifel ist, dass die polykontexturale Logik „unter“ der aristotelischen Logik anzusiedeln ist, nimmt die Semiotik, ebenfalls „unten“, eine eher neutrale Position ein. Vielleicht könnte man diese Verhältnisse etwa folgendermassen skizzieren:



Nun bildet aber die aristotelische Logik die Grundlage der quantitativen Mathematik und der Peano-Zahlen, ebenso wie die polykontexturale Logik die Grundlage der qualitativen Mathematik und der Trito-, Deutero- und Proto-Zahlen bildet. (vgl. Kronthaler 1986):



4. Hier stellt sich nun aber ein Problem von Seiten der Semiotik ein: Nach Toth (2009) ist eine Semiotik jede Struktur, welche das Tupel

$$\Sigma = \langle \text{OR}, \text{DR}, \text{ZR} \rangle$$

erfüllt. Der Weg von OR über DR zu ZR ist damit eine vollständige Semiose, denn diese beginnt mit der Wahl eines vorgegebenen Objektes im ontologischen Raum, d.h. in {OR}, und endet mit der Klassifikation des zum Zeichen erklärten, d.h. nach Bense metaobjektivierten Objektes in der Form einer Zeichenklasse (Bense 1967, S. 9).

Somit scheint es also kein Problem zu sein, im ontologischen Bereich die polykontexturale Logik und Ontologie sowie deren drei Zahlensysteme der Proto-, Deutero- und Tritozahlen anzusiedeln. Im Bereiche von ZR haben wir die von Bense so genannten „Primzeichen“ (Bense 1980), welche die Peano-Axiome erfüllen (Bense 1975, S. 170 ff., Bense 1983, S. 192 ff.). Damit aber stellt sich nun die Frage: So, wie der präsemiotische Raum der „disponiblen Kategorien“ (Bense 1975, S. 45 f., 65 f.), d.h. {DR}, zwischen {OR} einerseits und {ZR} andererseits vermittelt, müssen irgendwelche semiotischen Zahlen zwischen den Proto-, Deutero- und Trito-Zahlen einerseits und den Peanozahlen bzw. den Primzeichen andererseits vermitteln. Die zahlentheoretischen Verhältnisse der Semiotik sehen also wie folgt aus:

| Ebene von $\Sigma$                        | Semiotische Zahlen            |
|---|-------------------------------|
| OR = $(\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{F})$ | Proto-, Deutero-, Tritozahlen |
| DR = $(M^\circ, O^\circ, I^\circ)$        | ?                             |
| ZR = $(M, O, I)$                          | Peano-Zahlen, Primzeichen     |

D.h. wir haben

| Ebene von $\Sigma$                        | Semiotische Zahlen                                       |
|---|--|
| OR = $(\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{F})$ | $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$                          |
| DR = $(M^\circ, O^\circ, I^\circ)$        | (Vermittlungsebene)<br>$(2 \rightarrow 3)$<br>$\uparrow$ |
| ZR = $(M, O, I)$                          | $(1 \rightarrow 2)$<br>$\uparrow$<br>1                   |

Die Treppenstruktur der Primzeichen verdankt sich der Tatsache, dass das Zeichen nach Bense (1979, S. 53, 67) eine „Relation über Relationen“ ist, so zwar, dass die monadische Relation in der dyadischen, und beide zusammen in der triadischen Relation inkludiert sind. Wir kommen nun zu einem bedeutenden semiotischen Theorem, das wir jedoch noch nicht beweisen können:

**Theorem:** Der präsemiotische Raum der disponiblen Kategorien ist ein semiotisch-mathematisches Vermittlungssystem zwischen Ordinalität und Kardinalität bzw. umgekehrt.

In weiteren Arbeiten werden wir uns bemühen, Licht in diese mysteriösen Vermittlungszahlen zu bringen. Geht es wie bei Günther (1991, S. 419 ff.) um die Vermittlung von Zahl und Begriff?

## **Bibliographie**

Bense, Max, Die Theorie Kafkas. Köln 1952

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Günther, Gotthard, Das Phänomen der Orthogonalität. In: ders., Idee und Grundriss einer nicht-aristotelischen Logik. 3. Aufl. Hamburg 1991, S. 419-430

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Menne, Albert, Einführung in die Formale Logik. 2. Aufl. Darmstadt 1991

Tegmark, Max, Parallel Universes. In: Barrow, J.D et al., Science and Ultimate Reality. Cambridge, U.K. 2003, S. 1-18 (zit. nach Preprint)

Toth, Alfred, Semiotische Objekte. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979



## Nietzsche in Mexico. Der auf Abwesenheit gegründete Sinn

Dagegen nehme ich es als Belohnung auf, dass dies Jahr mir zweierlei zeigte, das zu mir gehört und mir innig nahe ist: das ist *Ihre* Musik und diese *Landschaft*. Das ist keine Schweiz, kein Recoaro, etwas *ganz* anderes, jedenfalls etwas viel Südlicheres – ich müsste schon nach den Hochebenen von Mexiko am stillen Ozeane gehen, um etwas Ähnliches zu finden (z.B. Oaxaca).

Nietzsche an Peter Gast, 14. August 1881 (ed. Schlechta, III, S. 1173)

1. Eine vollständige Zeichenrelation, wenigstens dann, wenn es sich um konkrete Zeichen handelt, kann sich nicht auf die drei Kategorien des Peirceschen Zeichens

$$\text{ZR} = (\text{M}, \text{O}, \text{I})$$

beschränken. Zum Beispiel kann anhand von ZR nicht entschieden werden, aufgrund von welcher Kriterien etwas ein Zeichen ist oder nicht, d.h. das, was Bense (1986, S. 129) von einer semiotischen Modelltheorie gefordert hat. So benötigt eine Zeichendefinition einer Sprache im Sinne einer Menge von Ausdrücken, über der eine Erfüllungsrelation entscheiden kann, ob ein Etwas ein Zeichen ist oder nicht. Z.B. sind alle drei Wörter „tree“, „arbre“ und „Baum“ Zeichen, sie gehören allerdings drei verschiedenen Sprachen und damit drei verschiedenen Repertoires an, erfüllen also die Zeichendefinition nicht generell. Damit muss also ZR durch ein Repertoire  $\{\text{M}\}$  ergänzt werden

$$\text{RZR} = (\{\text{M}\}, \text{M}, \text{O}, \text{I}).$$

Da wir vorhin von konkreten Zeichen sprachen, genügen natürlich die abstrakten Mittel im Sinne von 1-stelligen Relationen nicht, denn ein konkretes Zeichen benötigt zur Manifestation eines konkreten Zeichenträgers

$$\text{KRZR} = (\mathit{m}, \{\text{M}\}, \text{M}, \text{O}, \text{I}).$$

Ein konkretes Zeichen, speziell dann, wenn es unter teleologischen Aspekten wie „Was nützt ein Zeichen?“ betrachtet wird, benötigt, wie bereits aus Walther (1979, S. 138 ff.)

hervorgeht, zusätzlich des realen Objektes, das es substituiert bzw. repräsentiert, sowie des realen Zeichensetzers, der die Semiose durchführt:

$$TZR = (\{M\}, M, O, I, \mathcal{M}, \Omega, \mathcal{J}).$$

Aber auch dann ist die Zeichenrelation noch unvollständig, denn man kann zeigen, dass es weitere irreduzible Kategorien gibt (vgl. Toth 2009). Z.B. gibt es Etwase, die nur an einem bestimmten, singulären Ort die Zeichenrelation erfüllen, etwa ein Grabstein, der nur dort sinnvoll und damit ein Zeichen ist, wo der Tote, auf den der Grabstein verweist, begraben ist. Wird dagegen der Grabstein, etwa nach Aufhebung des Grabes, in einen Garten versetzt, so wechselt sein Zeichenstatus: er ist jetzt nicht mehr als ein Stein mit Aufschrift, höchstens eine Skulptur. Ebenso, wie Zeichen lokaler Kategorien benötigen können, können sie temporaler Kategorien bedürfen. So ist es etwa ein in der Sprachwissenschaft bekanntes Phänomen, dass vor allem gewisse Mundartwörter ausgestorben oder am Aussterben sind und entweder durch neue oder gar nicht ersetzt werden, d.h. dass diese Wörter als Zeichen temporal gebunden sind. Das gilt etwa im Deutschen für *sintemal*, *alldieweil*, *förben* (den Boden wischen). Wie man sieht, verschwinden Wörter also nicht nur mit den Objekten zusammen, die sie bezeichnen.

Eine vollständige Zeichenrelation, welche alle Arten konkreter und abstrakter Zeichen thematisieren kann, enthält also mindestens die folgenden 9 Kategorien:

$$TZR = (\{M\}, M, O, I, \mathcal{M}, \Omega, \mathcal{J}, \mathcal{C}, \mathcal{Z}),$$

d.h. Lexikon/Repertoire, die abstrakte und die konkrete Zeichenrelation, sowie Ort und Zeit.

2. Alle diese 9 irreduziblen Kategorien tragen also zum Sinn des Zeichens bei. Fehlt demnach eine oder fehlen mehrere dieser Kategorien, wird das Zeichen sinnlos. Hier sollen die hauptsächlichsten Fälle von auf Abwesenheit gegründetem Sinn aufgezählt werden.

2.1. Auf Abwesenheit von  $\{M\}$  gegründeter Sinn. Wenn das Lexikon fehlt, kann es keine Erfüllungsrelation für Zeichen geben, und wenn es die nicht gibt, gibt es weder Interpretationen noch Modelle im Sinne einer semiotischen Modelltheorie. Sehr einfach

gesagt, kann dann also nicht unterschieden werden, ob ein Gebilde ein Zeichen ist oder nicht. Im sprachlichen Teilgebiet der Semiotik war die wohl charakteristischste Bewegung, welche auf der Abwesenheit von {M} gegründeten Sinn geschaffen hatte, der Dadaismus, vgl. Hugo Balls „Karawane“:

jolifanto bambla o falli bambla  
großiga m'pfa habla horem  
egiga goramen  
higo bloiko russula huju  
hollaka hollala  
anlogo bung  
blago bung blago bung  
bosso fataka  
ü üü ü  
schampa wulla wussa olobo  
hej tatta gorem  
eschige zunbada  
wulubu ssubudu uluwu ssubudu  
tumba ba-umf  
kusa gauma  
ba - umf

Hier ist kein einziges Wort ein Wort der deutschen Sprache, und – wie man zwar in Ermangelung von Lexika bzw. Repertoires nur vermuten kann – wohl keiner Sprache. Dass das Gedicht trotzdem einen gewissen Eindruck und damit einen rudimentären Sinn vermittelt, liegt an der Assoziation der Nicht-Wörter an bekannte existierenden Wörter, d.h. in dem, was Saussure die Assoziativität des Paradigmas genannt hat.

2.2. Auf Abwesenheit von (M, O, I) gegründeter Sinn. Dieser Fall ist selten und semiotisch nicht sehr ergiebig – ausser, man behandelt ihn so, wie ihn Lewis Carroll im wohl prominentesten Beispiel behandelt hatte, nämlich dem „Wald, in dem die Dinge keinen Namen haben“. Wie bekannt, begegenen sich in jenem Wald Alice und ein Reh, und weil sich das Reh nicht an seinen Namen „Reh“ erinnern kann und daher auch nicht imstande ist, die Konnotation „Reh“ → „scheues Tier“ herzustellen, flieht es nicht, sondern lässt sich von Alice streicheln, und die beiden konversieren, bis der Wald des Vergessens zu Ende ist und das Land des Wieder-Erinnerns kommt, wo denn das Reh auch wirklich flieht.

2.3. Auf Abwesenheit von ( $\mathcal{M}$ ,  $\Omega$ ,  $\mathcal{J}$ ) gegründeter Sinn. Hier liegt also ein Zeichen vor, das kein Objekt bezeichnet. Hierzu gehören praktisch alle literarischen und filmischen Figuren, die zwar natürlich aus realen Personen zusammengesetzt sind, aber so nicht real existieren. Legendär ist „Mrs. Colombo“, die fiktive Frau des Oberinspektor Colombo aus der gleichnamigen US-TV-Serie. In diesen Fällen geht es allerdings nicht nur darum, dass ein Zeichen dadurch Sinn stiftet, dass es ein Objekt hypostasiert, sondern um die dadurch sich ändernde soziale Einstufung des ebenfalls hypostasierten Ehemannes bzw. sogar, im Falle Colombos, um einen Überraschungseffekt, denn wer Colombo sieht, würde nicht auf die Idee kommen, dass er eine Frau hat, die ihn im schmutzigen Rain-coat und verschieden farbigen Socken auf die Strasse gehen liesse.

2.4. Auf Abwesenheit von  $\mathfrak{C}$  gegründeter Sinn. Die bekanntesten Beispiele sind Kenotaphe. Sprachlich wird auf Abwesenheit von  $\mathfrak{C}$  gegründeter Sinn durch kultur- und oft lokalspezifische „Orts“-Namen ausgedrückt, die freilich meistens immer auch eine Konnotation besitzen und daher keine Fälle neutraler Sinnstiftung darstellen. Wenn in der Schweiz jemand von Seldwyla (Gottfried Keller) oder in Süddeutschland aus Hirschau ist, dann gehört er eine Gruppe von mental Unterminierten an. Dasselbe meint Karakószörözög im Ungarischen. Wenn man in Ungarn jemandem sagt: Elmehetsz Kukutyinba zabot hegyezni – wörtlich: „du kannst nach Kukutyin gehen, um den Hafer zu spitzen“, dann ist konnotiert, dass sich jemand „begraben lassen kann“, d.h. erledigt ist. Die ungarische Entsprechung vom Land „hinter den 7 Bergen bei den 7 Zwergen“ ist „illa berek, nádak, erek“, wo man heute berek „Hain“, nádak „Ried“ und erek „Wasserader, Quelle“ heraushört, worin aber wohl die Namen zweier grossungarischen Komitate: Bereg und Ung stecken. Es gibt also zum Ausdruck von auf Abwesenheit von  $\mathfrak{C}$  gegründetem Sinn sowohl rein fiktive Ortsnamen (Seldwyla) als auch real-existente, d.h. durch Konnotation entfremdete (Hirschau, z.B. Teil von Tübingen).

2.5. Auf Abwesenheit von  $\mathfrak{Z}$  gegründeter Sinn. Hierhin weisen Bezeichnungen wie „St. Nimmerleinstag“, im Basler Deutschen „Anno Tubak“ (= Tabak), lateinisch „ad Kalaendas Graecas“, ung. Sohadika, usw.

## **Bibliographie**

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Nietzsche, Friedrich, Werke. Hrsg. von Karl Schlechta. Bd. III. 6. Aufl. München  
(Hanser) 1969

Toth, Alfred, Irreduzible semiotische Relationen. In: Electronic Journal for  
Mathematical Semiotics, 2009

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

## Zweiwertige vs. mehrwertige Linguistik

1. Das Thema, um das es hier – im Anschluss an Toth (2008) – geht, lautet: “Alle bisher entwickelten Sprachen in unseren terrestrischen Hochkulturen setzen ein zweiwertiges Weltbild voraus. Ihre Reflexionsstruktur ist deshalb ebenfalls rigoros zweiwertig, und es fehlen die linguistischen Mittel, um mehrwertige Erlebnissituationen in ihnen angemessen auszudrücken. Ein Beispiel soll die Situation verdeutlichen. Der klassische Kalkül kennt einen und nur einen Begriff von ‘und’. Das gleiche gilt für die deutsche, englische, französische usw. Sprache. In einer dreiwertigen Logik aber werden bereits vier (!) verschiedene und durch differente logische Funktoren identifizierte Bedeutungen von ‘und’ unterschieden. In unseren heutigen Umgangssprachen hat ‘und’ in den folgenden Konjunktionen ‘ein Gegenstand *und* noch ein Gegenstand’, ‘Ich *und* die Gegenstände’, ‘Du *und* die Gegenstände’, ‘Wir *und* die Gegenstände’ immer die gleiche Bedeutung. In anderen Worten: die klassische Logik und die an ihr spirituell orientierten Sprachen setzen voraus, dass der metaphysische Begriff der Ko-existenz so allgemein gefasst werden kann und muss, dass in ihm der Unterschied zwischen gegenständlicher Existenz und den drei möglichen Aspekten von Reflexionsexistenz irrelevant ist. Begriffe wie ‘Ich’, ‘Du’ und ‘Wir’ haben in der uns überlieferten Logik schlechthin keinen Sinn” (Günther 1991, p. xviii).

2. Gegeben sei eine 4-kontexturale semiotische Matrix, wie sie in Kaehr (2008) eingeführt worden war:

$$\left( \begin{array}{ccc} 1.1_{1,3,4} & 1.2_{1,4} & 1.3_{3,4} \\ 2.1_{1,4} & 2.2_{1,2,4} & 2.3_{2,4} \\ 3.1_{3,4} & 3.2_{2,4} & 3.3_{2,3,4} \end{array} \right)$$

Da, wie Elisabeth Walther (1985) gezeigt hatte, die Linguistik das gesamte System der 10 Peirceschen Zeichenklassen und Realitätsthematiken zu seiner Analyse und Darstellung benötigt, muss es möglich sein, nicht nur den Wörtern einer Sprache, sondern auch ihrer semiotischen Fundierung jene logisch-erkenntnistheoretische,

verloren gegangene Deutung zurückzugeben, von der Günther spricht. Dazu nehmen wir folgende Zuordnungen vor:

1 → ich

2 → du

3 → wir

4 → es

Das ist also die logisch-erkenntnistheoretische Struktur einer 4-wertigen Logik mit 3 Subjekts- und 1 Objektspostion. Damit können wir also die Güntherschen Beispiele wie folgt in eine „kontexturierte Linguistik“ übersetzen:

Ich und<sub>1,4</sub> die Gegenstände.

Du und<sub>2,4</sub> die Gegenstände.

Wir und<sub>3,4</sub> die Gegenstände.

Ein Gegenstand und<sub>4</sub> noch ein Gegenstand.

Damit wird übrigens auch klar, dass

1 + 1 = ?

in dieser Form unlösbar bzw. sogar sinnlos ist, solange nicht gesagt wird, was das durch die Ziffern Gezählte ist. Addiere ich also

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| 1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel      | = 1 Apfel und <sub>1</sub> 1 Apfel                           |
| 1 Apfel + 1 Birne = ?            | = 1 Apfel und <sub>2</sub> 1 Birne                           |
| 1 Apfel + 1 Birne + 1 Orange = ? | = 1 Apfel und <sub>2</sub> 1 Birne und <sub>3</sub> 1 Orange |

(wobei sich hier die Kontexturalzahlen mit jeder neuen Qualität erhöhen, d.h. nicht mit den obigen logischen Zuweisungen identisch sind). Da speziell Subjekte als Qualitäten zählen, sind also auch die Konjunktionen in den folgenden Fällen nicht identisch:

Hans und<sub>2</sub> Fritz essen Kuchen.

Hans und<sub>2</sub> Fritz und<sub>3</sub> Karl essen Kuchen.

Hans und<sub>2</sub> Fritz und<sub>3</sub> Karl und<sub>4</sub> Max essen Kuchen.

Somit ist „und“ sensu stricto, d.h. als und<sub>1</sub>, nur in trivialen Fällen wie etwa

Hans isst. = Hans und<sub>1</sub> Hans essen.  
2 Birnen. = 1 Birne und<sub>1</sub> 1 Birne.

anwendbar.

3. Nun besitzt aber die Sprache noch mehr referentielle Pronomina, d.h.

- 1 → ich
- 2 → du
- 3 → er/sie
- 4 → wir
- 5 → ihr
- 6 → sie
- 7 → es,

die bekanntlich alle irreduzibel sind. (Es ist auch in den meisten Sprachen unmöglich, etwa „ich“ + Numerus-Merkmal = „wir“ oder „du“ + Numerus-Merkmal = „ihr“ zusetzen, da hiermit inklusive und exklusive „wir-“, bzw. „ihr“-Relationen, die weiter verbreitet sind als viele Linguisten wissen, nicht erklärbar sind. Ebenfalls unsinnig ist die Ansetzung von „ich“ + „die anderen“ = wir bzw. „du“ + „die anderen“ = „ihr“, da hiermit „sie“ nicht unterscheidbar sind. Ferner gibt es sogar Sprachen, die in der Referenz der 3. Person Genera unterscheiden (z.B. das Hebräische).

Zur Illustration vgl. die ungarischen Ausdrücke

szeretek<sub>1</sub> = ich liebe<sub>1</sub>  
szeretem<sub>1,3</sub> = ich liebe<sub>1</sub> (ihn/sie/es)<sub>2</sub>  
szeretlek<sub>1,2</sub> = ich liebe<sub>1</sub> dich<sub>2</sub>, usw.

Es gibt nun Sprachen, wie das Mordwinische, oder noch komplexer, das Gröndländische, wie es bei Kleinschmidt (1862) dargestellt ist, das ganze Agglutinationsreihen von subjektiven und objektiven Referenzen darstellen kann, wie natürlich hierzu auch das Baskische, das vielen bekannter sein wird. Dt. Beispiele:



Ich liebe<sub>1,1</sub> mich.  
Ich liebe<sub>1,2</sub> dich.  
Du liebst<sub>2,4</sub> uns.  
Du liebst<sub>2,5</sub> euch.  
Er liebt<sub>3,3,6</sub> sie und sie (pl.)

Die Frage, die sich allerdings in der Linguistik bisher offensichtlich nie gestellt hat, ist, wie man Problemfälle wie die folgenden darstellen soll:

Wir lieben Hans und Fritz.  
Hans liebt Frieda und Würste.

Im ersten Fall gehören Hans und Fritz nicht der gleichen Kontextur an, trotzdem würden sie nach den letzten Zuordnungen unter  $K = 3$  fallen. Beim zweiten Fall ist es nämlich, nur sind hier Qualitäten, d.h. die Kontexturen, noch auf ein Subjekt (Frieda) und ein Objekt (Würste) verteilt. Da spielt es keine Rolle, dass dieser Satz wohl offiziell als ungrammatisch eingestuft würde.

4. Ein weiteres mögliches und neues Anwendungsgebiet für kontexturierte Linguistik ist die Barrierentheorie, die von Chomsky kurz vor der immer noch gültigen Minimalitätstheorie (Minimalist Hypothesis) entworfen wurde. Vgl. z.B. die folgenden Sätze aus Sternefeld (1991, S. 143):

Über wen hast Du [<sub>NP</sub> ein Buch t ] geschrieben/\*geklaut.  
Von wem hast Du [<sub>NP</sub> ein Buch t ] gelesen/\*vernichtet  
Von wem ist [<sub>NP</sub> der Bruder t ] gestorben.  
\*Von wem hat [<sub>NP</sub> der Bruder t ] verschlafen.

Wenn wir die Normalformen dieser Wh-Fragen betrachten und sie kontexturieren, bekommen wir

Du<sub>2</sub> hast ein Buch<sub>7</sub> über X<sub>3</sub> geschrieben.  
\*Du<sub>2</sub> hast ein Buch<sub>7</sub> über X<sub>3</sub> geklaut.  
Du<sub>2</sub> hast (ein Buch von X<sub>7</sub>) geklaut.

„über X“ referiert also auf die besprochene Person, d.h.  $K = 3$ , während „ein Buch von X“ als ganzes ein Objekt ist, d.h. auf  $K = 7$  referiert; aus der Verletzung von  $K = 3$  und  $K = 7$  ergibt sich die Ungrammatizität. Zum nächsten Satz ist zu sagen, dass, wenigstens dialektal, „Vom wem hast Du ein Buch gelesen“ ambig ist (1. Wessen Buch hast Du gelesen. 2. Ein Buch über wen?) Ob die übrigen Fälle zur gleichen Gruppe gehören,

betrachte ich als sehr fraglich. „Von wem ich der Bruder gestorben“ müsste eigentlich selber erklärt werden, logisch müsste die Barriere ja nach „wem“ und nicht nach „ist“ beginnen (\*Von wem der Bruder ist gestorben? Vgl. Wessen Bruder ist gestorben? und nicht etwa „Wessen ist Bruder gestorben“), kurz: der nicht-gestirnte Satz ist erklärungsbedürftig. Damit hängt auch zusammen, dass der gestirnte Satz \*Von wem hat der Bruder verschlafen im Schweizerdt. untadelhaft ist: Vo wem hät de Brüeder vetschloofe? – Jedenfalls sind hier keine kontextuellen Barrieren involviert.

## **Bibliographie**

Günther, Gotthard, Idee und Grundriss einer nicht-aristotelischen Logik. 3. Aufl.  
Hamburg 1991

Kaehr, Rudolf, Diamond Semiotics,

<http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Diamond%20Semiotics/Diamond%20Semiotics.pdf> (2008)

Sternefeld, Wolfgang , Syntaktische Grenzen. Opladen 1991

Toth, Alfred, Semiotic coexistence. In: Electronic Journal of Mthematical Semiotics, 2008

Walther, Elisabeth, Semiotik der natürlichen Sprache. In: Semiosis 39/40, 1985, S. 46-61

# Qualitative semiotische Zahlentheorie

1. Betrachten wir eine klassische monokontexturale Zeichenklasse, z.B.

$$\text{Zkl} = (3.1 \ 2.1 \ 1.3).$$

Sie repräsentiert die Klasse aller Zeichen, welche z.B. für „ein allgemeines Diagramm, das von einer faktischen Aktualität unabhängig ist, wie typische Fieberkurven“ (Walther 1979, S. 83) stehen.

2. Kaehr (2008) hatte nun den Vorschlag gemacht, Zeichenklassen dadurch zu polykontextualisieren, dass er sie kontexturierte. Damit können Zeichen bzw. ihre Subzeichen dahingehend unterschieden werden, für wen sie Zeichen bzw. Subzeichen sind, da die Kontexturenzahlen ja den Qualitäten und damit den ontologischen Orten der Subjekte korrespondieren, vgl. z.B.

$$\text{Zkl} = (3.1_3 \ 2.1_1 \ 1.3_3).$$

Auf diese kann elegant der die Monokontexturalität garantierende logische Identitätssatz ausgeschaltet werden; dieser äussert sich in der Semiotik durch die Eigenrealität (vgl. Bense 1992):

$$\text{Zkl} \times \text{Rth} = (3.1_3 \ 2.2_{1,2} \ 1.3_3) \times (3.1_3 \ 2.2_{2,1} \ 1.3_3),$$

d.h. die Dualidentität der monokontexturalen Form

$$(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = \times(3.1 \ 2.2 \ 1.3)$$

ist in der kontexturierten Form aufgehoben

$$\times(3.1_3 \ 2.2_{1,2} \ 1.3_3) = (3.1_3 \ 2.2_{2,1} \ 1.3_3)$$

$$(3.1_3 \ 2.2_{2,1} \ 1.3_3) \neq (3.1_3 \ 2.2_{1,2} \ 1.3_3).$$

Da die eigenreale Zeichenklasse das Repräsentationsschema der Zahl als solcher ist, bedeutet das also, dass sie in einer Welt, die aus mehr als 1 Kontextur besteht, eine von ihr unabhängige Realität thematisiert, d.h. dass sie fähig ist, ausser der mit ihrer Zeichenthematik identisch Realitätsthematik der Quantität weitere Qualitäten zu repräsentieren. Solche qualitativen Zahlbereiche sind bekanntlich die Proto-, die Deutero- und die Trito-Zahlen (vgl. Günther 1980 [1971], S. 241-264). Zusammenfassend gesagt: Die Eigenrealität in monokontexturalen semiotischen Systemen garantiert die Mathematik der Quantitäten durch die Dualidentität von Zeichen- und Realitätsthematik, aber die Aufhebung der Eigenrealität durch Elimination des logischen Identitätssatzes in polykontexturalen semiotischen Systemen garantiert die Mathematik der Qualitäten durch die Dualverschiedenheit von Zeichen- und Realitätsthematik.

3. Das grosse Problem bei Kaehrs Kontexturierung – und darum hatten wir auch diesen Begriff anstatt des Begriffes „Polykontexturalisierung“ gewählt, ist nun natürlich, dass es im Grunde ein, obwohl genialer, Trick ist, um Repräsentation und Präsentation zu vereinigen: Ein monokontexturales Dualsystem wie z.B.

$$(3.1\ 2.1\ 1.3) \times (3.1\ 1.2\ 1.3)$$

repräsentiert, präsentiert aber nicht. Aber ein kontexturiertes Dualsystem wie z.B.

$$(3.1_3\ 2.1_1\ 1.3_3) \times (3.1_3\ 1.2_1\ 1.3_3)$$

repräsentiert nicht nur, sondern präsentiert auch. Die Repräsentation betrifft die Objekte in den Zeichen und ihren Subzeichen, die Präsentation betrifft die erkenntnistheoretisch-logischen Relationen in ihren ontologischen Orten, den kontexturalen Qualitäten. Liest man dagegen in Günthers „Natural numbers in trans-classic systems“ (Günther 1971), so dürfte eine solche Kontexturalisierung nicht möglich sein, ohne die Proto-, Deutero- und Trito-Zahl-Strukturen dieser Zeichenklassen zu ermitteln. Überhaupt ist die Kontexturalisierung Kaehrs eigene Erfindung. Um aber monokontexturale Systeme zu polykontexturalisieren, gibt es nur einen Weg: sie auf ihre kenogrammatistische Basis zurückzuführen (vgl. Kronthaler 1992), denn in monokontexturalen Systemen ist die Semiotik „die tiefste Fundierung“ (Bense 1983, S. 64 ff.). Das grosse Problem besteht nun aber darin, worauf ich in manchen Schriften

hingewiesen habe, dass Zeichen und Kenogramm unvereinbar sind, denn bei der Tieferlegung des Zeichens auf das Kenogramm verschwinden alle Merkmale, welche das Zeichen zum Zeichen machen, z.B. die Dichotomie von Zeichen und Objekt, welche natürlich mit der logischen Dichotomie von Subjekt und Objekt identisch ist und welche in der polykontexturalen Logik ja gerade durch die Proömalrelation „hintergangen“, d.h. aufgehoben wird. Es ist also einfach so, dass ein weiter reduziertes Zeichen kein Zeichen mehr ist, sondern ein Kenogramm, und dass ein dichotomisiertes, d.h. identitätslogisches Kenogramm (ein Kenogramm, das mit Werten belegt ist) ein Zeichen, aber kein Kenogramm mehr ist.

4. Die Frage ist also: Gibt es eine Möglichkeit, qualitative semiotische Zahlbereiche, d.h. semiotische Proto-, Deutero- und Trito-Systeme durch (echte) Polykontexturalisierung zu konstruieren, so dass wenigstens irgendwelche definitorischen Eigenschaften von Zeichen noch erkennbar bleiben? (Über diese Frage ist leider mein Buch von 2003 nicht weitergekommen.) Im folgenden lege ich einen konkreten Vorschlag vor.

4.1. Da eine ideale Semiotik ebenso wie eine ideale Logik über 3 Subjekte – ich, du und wir – verfügen sollte, zuzüglich eines Objektes, gehen wir also von einer 4-wertigen Semiotik auf der Basis der einer 4-wertigen Logik aus. Das jedes Kenogramm für einen ontologischen Ort steht, benötigen wir also Morphogramme der Länge 4. Das Basis-Morphogramm sieht daher wie folgt aus:

0000.

Da die Belegung dieses Leerstellen-Patterns von hinten her erfolgt, machen wir folgende Zuschreibung (oder „Einschreibung“):

|    |     |    |     |
|----|-----|----|-----|
| 0  | 0   | 0  | 0   |
| ↑  | ↑   | ↑  | ↑   |
| Es | Wir | Du | Ich |

Wird nun das Leerstellen-Pattern mit Zahlen belegt, so geschieht diese Belegung aber von links nach rechts, entsprechend den Gepflogenheiten in der Mathematik der Qualitäten (vgl. Kronthaler 1986, S. 26 ff.). Dadurch ergeben sich also die folgenden

Korrespondenzen mit den Plätzen, d.h. den ontologischen Orten (Kenogrammen, Qualitäten, Stellen im Morphogramm):

Es ↔ 0  
Wir ↔ 1  
Du ↔ 2  
Ich ↔ 3,

oder als Bild

|    |     |    |     |
|----|-----|----|-----|
| 0  | 1   | 2  | 3   |
| ↓  | ↓   | ↓  | ↓   |
| 0  | 0   | 0  | 0   |
| ↑  | ↑   | ↑  | ↑   |
| Es | Wir | Du | Ich |

Wie man erkennt, ist dies jeoch zugleich die Maximal-Belegung eines 4-stelligen (4-kontexturalen) Leerstellen-Patterns, da nach der Kronthalerschen Konvention die initiale  $\emptyset$ -Stelle immer leer bleibt.

4.2. Das 4-stellige Leerstellen Pattern 0000 ist als 4-kontexturales Morphogramm 1. Teil des 4 Morphogramme umfassenden 4-Proto-Zahlen-Systems, des 5 Morphogramme umfassenden 4-Deutero-Zahlen-Systems, und des 15 Morphogramme umfassenden 4-Trito-Zahlen-Systems.

#### 4.2.1. Semiotisches 4-Proto-Zahlen-System

0000  
0001  
0012  
0123

Austauschrelationen:

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 0  | 0  | 0  | 0  |
| ↓  | ↓  | ↓  | ↓  |
| 0  | 0  | 0  | 0  |
| ↑  | ↑  | ↑  | ↑  |
| Es | Es | Es | Es |

Hier sind alle Subjekte durch das Objekt ersetzt, d.h. wir haben das Objekt als Ausgangspunkt der Semiose vor uns. Im Prinzip liegt hier also keine Austauschrelation vor, es sei denn, man gehe vom Zeichen als dem Endstadium der Semiose aus (s.u.).

|    |    |    |     |
|----|----|----|-----|
| 0  | 0  | 0  | 1   |
| ↓  | ↓  | ↓  | ↓   |
| 0  | 0  | 0  | 0   |
| ↑  | ↑  | ↑  | ↑   |
| Es | Es | Es | Wir |

Austauschrelationen: Wir → Es, Du → Es, Ich → Wir.

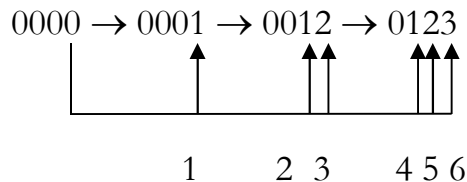
|    |    |     |    |
|----|----|-----|----|
| 0  | 0  | 1   | 2  |
| ↓  | ↓  | ↓   | ↓  |
| 0  | 0  | 0   | 0  |
| ↑  | ↑  | ↑   | ↑  |
| Es | Es | Wir | Du |

Austauschrelationen: Wir → Es, Du → Wir, Ich → Du.

|    |     |    |     |
|----|-----|----|-----|
| 0  | 1   | 2  | 3   |
| ↓  | ↓   | ↓  | ↓   |
| 0  | 0   | 0  | 0   |
| ↑  | ↑   | ↑  | ↑   |
| Es | Wir | Du | Ich |

Austauschrelationen: keine. Es liegt das Zeichen in seiner vollständigen Belegung, wie sie in 4 Kontexturen (unabhängig von Proto-, Deutero- oder Trito-Struktur) möglich ist, vor. Geht man jedoch vom reinen Objekt als Ausgangsstadium der Semiose aus (s.o.), dann haben wir hier zwei Sorten von Belegungen: Zuerst die Belegung des  $\emptyset$ -Patterns durch die den Zahlen korrespondierenden logisch-erkenntnistheoretischen Relationen, und zwar noch unabhängig von den Plätzen. Anschliessend werden diese Relationen so organisiert, dass die richtigen Relationen auf den richtigen Plätzen zu stehen kommen. Erst in diesem zweiten Stadium kommt also die Einheit von Zahl, Ort und Relation zustande. Man kann diese zwei Stadien in dem folgenden Schema einer „verketteten“ Austauschrelation darstellen:

Verkettete Austauschrelationen:



1: Es  $\rightarrow$  Wir; 2 : Es  $\rightarrow$  Wir; 3: Wir  $\rightarrow$  Du, 4: Es  $\rightarrow$  Wir, 5: Wir  $\rightarrow$  Du, 6: Du  $\rightarrow$  Ich.

D.h. es werden zuerst die objektiven Stellen durch Subjekte belegt, und anschliessend die Subjekte so lange ersetzt, bis die Grundstellung (s.o.) erreicht ist. Solche verketteten Austauschrelationen finden natürlich auch in den Deutero- und den Trito-Systemen statt, wir lassen sie jedoch im folgenden weg, da sie leicht selbst konstruiert werden können.

#### 4.2.2. Semiotisches 4-Deutero-Zahlen-System

0000  
 0001  
 0011  
 0012  
 0123

Im Unterschied zum Proto-System gibt es hier zwei weitere Austauschrelationen:



|    |    |     |     |
|----|----|-----|-----|
| 0  | 0  | 0   | 1   |
| ↓  | ↓  | ↓   | ↓   |
| 0  | 0  | 1   | 1   |
| ↑  | ↑  | ↑   | ↑   |
| Es | Es | Wir | Wir |

Austauschrelation: Es → Wir.

|    |    |     |    |
|----|----|-----|----|
| 0  | 0  | 1   | 1  |
| ↓  | ↓  | ↓   | ↓  |
| 0  | 0  | 1   | 2  |
| ↑  | ↑  | ↑   | ↑  |
| Es | Es | Wir | Du |

Austauschrelation: Wir → Du.

#### 4.2.3. Semiotisches 4-Trito-Zahlen-System

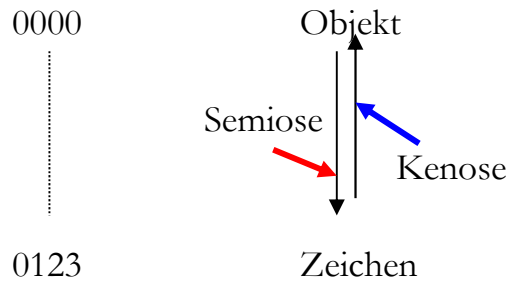
0000  
0001  
0010  
0011  
0012  
0100  
0101  
0102  
0110  
0111  
0112  
0120  
0121  
0122  
0123

Austauschrelations-Kette:

|           |            |     |     |
|-----------|------------|-----|-----|
| 0         | 0          | 0   | 0   |
| ↓         | ↓          | ↓   | ↓   |
| 0         | 0          | 0   | 1   |
| ↑         | ↑          | ↑   | ↑   |
| <b>Es</b> | Es         | Es  | Wir |
| ↓         | ↓          | ↓   | ↓   |
| 0         | 0          | 1   | 0   |
| ↑         | ↑          | ↑   | ↑   |
| <b>Es</b> | Es         | Wir | Es  |
| ↓         | ↓          | ↓   | ↓   |
| 0         | 0          | 1   | 1   |
| ↑         | ↑          | ↑   | ↑   |
| <b>Es</b> | Es         | Wir | Wir |
| ↓         | ↓          | ↓   | ↓   |
| 0         | 0          | 1   | 2   |
| ↑         | ↑          | ↑   | ↑   |
| <b>Es</b> | Es         | Wir | Du  |
| ↓         | ↓          | ↓   | ↓   |
| 0         | 1          | 0   | 0   |
| ↑         | ↑          | ↑   | ↑   |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | Es  | Es  |
| ↓         | ↓          | ↓   | ↓   |
| 0         | 1          | 0   | 1   |
| ↑         | ↑          | ↑   | ↑   |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | Es  | Wir |
| ↓         | ↓          | ↓   | ↓   |
| 0         | 1          | 0   | 2   |
| ↑         | ↑          | ↑   | ↑   |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | Es  | Du  |
| ↓         | ↓          | ↓   | ↓   |
| 0         | 1          | 1   | 0   |
| ↑         | ↑          | ↑   | ↑   |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | Wir | Es  |
| ↓         | ↓          | ↓   | ↓   |

|           |            |           |            |
|-----------|------------|-----------|------------|
| 0         | 1          | 1         | 1          |
| ↑         | ↑          | ↑         | ↑          |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | Wir       | Wir        |
| ↓         | ↓          | ↓         | ↓          |
| 0         | 1          | 1         | 2          |
| ↑         | ↑          | ↑         | ↑          |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | Wir       | Du         |
| ↓         | ↓          | ↓         | ↓          |
| 0         | 1          | 2         | 0          |
| ↑         | ↑          | ↑         | ↑          |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | <b>Du</b> | Es         |
| ↓         | ↓          | ↓         | ↓          |
| 0         | 1          | 2         | 1          |
| ↑         | ↑          | ↑         | ↑          |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | <b>Du</b> | Wir        |
| ↓         | ↓          | ↓         | ↓          |
| 0         | 1          | 2         | 2          |
| ↑         | ↑          | ↑         | ↑          |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | <b>Du</b> | Du         |
| ↓         | ↓          | ↓         | ↓          |
| 0         | 1          | 2         | 3          |
| ↑         | ↑          | ↑         | ↑          |
| <b>Es</b> | <b>Wir</b> | <b>Du</b> | <b>Ich</b> |

5. Man sieht an der obigen Liste der semiotischen 4-Trito-Zahlen am besten, wie logisch-erkenntnistheoretische Relationen solange umgetauscht werden, bis der Anfangszustand 0000 des noch nicht von einem Subjekt „infiltrierten“ Zustandes bis zur regelmässigen „Durchdringung“ dieses inzwischen zum Zeichen (0123) metaobjektivierten (Bense 1967, S. 9) Objektes ersetzt ist, d.h. bis sämtliche logisch-erkenntnistheoretischen Relationen des ursprünglichen Objektes durch das Zeichen **substituiert** sind und die **Einheiten von Zahl, Ort und Relation** hergestellt sind:



Semiotische qualitative Zahlen repräsentieren also nicht, sie substituieren, aber die Substitution geht jeder Repräsentation voraus und dürfte die ursprünglichste Aufgabe der Zeichen gewesen sein. Ferner präsentieren die semiotischen qualitativen Zahlen wie die kontexturierten Zeichenklassen, aber jene substituieren, wo diese repräsentieren. Mit der Reduktion der Repräsentation auf die Substitution wird also der Weg zur Tierferlegung der Zeichen auf die qualitativen Zahlensysteme geöffnet.

Damit haben wir also die Antwort auf unsere obige Frage, ob es möglich sei, eine Tieferlegung der Semiotik statt durch bloße Kontexturierung der Subzeichen durch die drei qualitativen semiotischen Zahlensysteme der Proto-, der Deutero- und der Trito-Zeichen zu erreichen, ohne dass sämtliche definitorischen Merkmale des Zeichens abhanden kommen. Die Antwort lautet nun: **Dies ist möglich, wenn man die Repräsentationsfunktion des Zeichens durch die Substitutionsfunktion ersetzt.**

## Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1983

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Günther, Gotthard, Beiträge zur Grundlegung einer operationsfähigen Dialektik. 3 Bde. Hamburg 1978-80.

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds.

<http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Semiotics-in-Diamonds/Semiotics-in-Diamonds.html> (2009)

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Kronthaler, Engelbert, Zeichen – Zahl – Begriff. In: Semiosis 65-68, 1992, S. 282-310

Toth, Alfred, Die Hochzeit von Semiotik und Struktur. Klagenfurt 2003

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

## Die Logik als morphogrammatisches Fragment der Semiotik

1. Bekanntlich kam Peirce nie zu einem Schluss, ob die Semiotik der Logik über- oder untergeordnet war (vgl. Walther 1989, S. 345 f. m. Lit.). Denn einerseits kann man sagen, die Logik, die ja die Basis der Mathematik darstellt, muss deshalb, weil man die Semiotik als einen Zweig der Mathematik ansehen kann, jener untergeordnet sein, d.h. es gilt  $\text{Logik} \subset \text{Semiotik}$ . Andererseits ist es doch aber so, dass auch die Semiotik sich den fundamentalen Gesetzen des Denkens, d.h. den Sätzen des Grundes, der Identität, der Zweiwertigkeit und des Ausgeschlossenen Mittels, zu fügen hat, also muss auch  $\text{Semiotik} \subset \text{Logik}$  gelten.

2. Die Kenogrammatik beanspricht nun für sich, die tiefste überhaupt erreichbare Fundierung aller Systeme zu sein, d.h. tiefer noch, als es nach Peirce und Bense (1983, S. 64 ff.) die Semiotik ist. Jedes Kenogramm gibt als Leerzeichen eine ontologischen Ort, d.h. es eine Qualität ein, in die nun verschiedene Dinge eingeschrieben werden können:

Logische Werte =  $\{0, 1\}$  → Kenogramme: polykontexturale Logik

Zahlenwerte =  $\mathbb{N} \cup \{0\}$  → Kenogramme: Mathematik der Qualitäten

Semiotische Werte  $\subset \{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$  → Kenogramme: polykont. Semiotik

Wie man nun sieht, sind auch die logischen Werte  $\subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ , d.h. für sämtliche der drei Wertsysteme Logik, Mathematik und Semiotik wird einfach eine je verschiedene Teilmenge der natürlichen Zahlen vermehrt um die Null, auf Kenogrammstrukturen abgebildet. Aus ihnen können dann Morphogramme gebildet werden, die in Proto-, Deutero- und Trito-Strukturen unterteilt werden.

3. In der Praxis sieht es jedoch so aus, dass nach der Abbildung der natürlichen Zahlen plus 0 auf die Kenogramme diese wertbesetzten Kenogramme interpretiert werden müssen. Was ist ein wertbesetztes Kenogramm? Es ist eine qualitative Zahl, d.h. eine mit Quantitäten besetzte Qualitätsstelle, ein mit Quantitäten belegter ontologischer Ort. Dieser wird nun in den drei Systemen wie folgt interpretiert:

|            |                             |   |                    |
|------------|-----------------------------|---|--------------------|
| Logik:     | $\{0, 1\}$                  | → | Wahrheitswerte     |
| Mathematik | $\{\mathbb{N} \cup \{0\}\}$ | → | Zahlwerte          |
| Semiotik:  | $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  | → | Epistemische Werte |

In der Logik sieht das also z.B. so aus: w(ahr), f(alsch) oder 1, 2, 3, 4, ... . In der Mathematik ist es genauso wie in der Semiotik, nur dass sicherlich nicht unendlich viele Werte für eine Semiotik gebraucht werden. An epistemischen Werten kann man z.B. bestimmen: 1 = Ich, 2 = Du, 3 = Wir, 4 = Es u.dgl. Nun ist es aber so, dass wir in einer 2-wertigen Logik haben: 1 = wahr = Es; 2 = falsch = Ich/Du (ohne Unterscheidung). In einer 3-wertigen Logik haben wir dann entsprechend z.B.: 1 = wahr = Es; 2 = falsch = Ich; 3 = Rejektion (Verwerfung der wahr/falsch-Alternative) = Du/Wir, usw. Daraus folgt also, dass die Semiotik, wenn man ihre Werte epistemisch bestimmt, die Logik als morphogramatisches Fragment enthält, denn eine Semiotik hat immer mindestens 3 Werte, eine Logik aber mindestens 2, so dass also gilt

$$\{0, 1\} \subset (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$$

Logik  $\subset$  Semiotik.

4. Sobald allerdings eine Logik mehr als 2 Werte hat, kann der Fall

Logik  $\subseteq$  Semiotik eintreten,

wobei diese Relationen, was eigentlich klar sein sollte, sich ausschliesslich auf die polykontexturale Logik und die polykontexturale Semiotik beziehen. Da im Idealfall eine auf epistemischen Relationen definierte Semiotik natürlich die gleiche Anzahl von Werten haben sollte wie die entsprechende Logik, kann man die Ergebnisse dieser Untersuchung in dem folgenden Satz zusammenfassen:

**Theorem:** Wird eine polykontexturale n-wertige Semiotik auf epistemischen Werten 1, 2, 3, ..., n definiert, so ist die korrespondierende m-wertige Logik eine Teilmenge und für  $m < 3$  eine echte Teilmenge ihrer Semiotik.

Allerdings dürfte die Verwendung des Begriffs „morphogramatisches Fragment“ im Anschluss an Toth (2003, S. 54 ff.) für polykontexturale Systeme angebrachter sein als die Begriffe Menge und Teilmenge, die aus der quantitativen Mathematik stammen.

### **Bibliographie**

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1983

Toth, Alfred, Die Hochzeit von Semiotik und Struktur. Klagenfurt 2003

Walther, Elisabeth, Charles Sanders Peirce, Leben und Werk. Baden-Baden 1989

## Das semiotische Fundamentalparadox

1. Einer der am meisten zitierten Sätze der Semiotik lautet: „Jedes beliebige Etwas kann (im Prinzip) zum Zeichen erklärt werden“. Der gleich nachfolgende Satz lautet: „Was zum Zeichen erklärt wird, ist selbst kein Objekt mehr, sondern Zuordnung (zu etwas, was Objekt sein kann); gewissermassen Metaobjekt“ (Bense 1967, S. 9). Aus diesem semiotischen Fundamental-Axiom schliessen wir also zweierlei:

1.1. Bei der Semiose wird immer ein Objekt zum Zeichen erklärt. Der umgekehrte Prozess – der in der Bense-Semiotik, abgesehen von einigen Aufsätzen von mir, überhaupt nicht einmal erwähnt wurde - beträfe also die Rückgängigmachung eines Zeichens zu (s)einem Objekt.

1.2. Da das Objekt aber beim Übergang zum Zeichen seine typentheoretischen Status verliert (es wird zum Metaobjekt), dürfte die Umkehrung der Semiose sehr schwierig, wenn nicht unmöglich, sein: Quo semel est imbuta recens / servabit odorem testa diu.

2. Eine andere Frage, die sich zum Anfang der Semiose, aufgefasst als dem Ineingreifen von Ontologie und Semiotik, stellt, ist: Wenn ein Objekt zum Zeichen erklärt wird, erhöht sich die Menge der Zeichen dieser Welt. Kommt aber dadurch auch das betreffende Objekt der Welt abhanden, oder gibt es einen semiotisch-ontologischen Erhaltungssatz? Wie Benses Fundamental-Axiom vermuten lässt, gibt es keinen solchen: Ein Etwas, zum Zeichen erklärt, geht der Objektwelt verloren. Allerdings scheint dies in Wahrheit nicht so einfach zu sein, denn das Taschentuch, das ich dadurch zum Zeichen mache, dass ich es verknote, kann ich ja, nachdem ich es aus seiner Zeichenfunktion entlasse, wieder als Objekt gebrauchen. Das Auto, das ich als Geburtstagsgeschenk und daher zum Zeichen der Anerkennung, Ehrung usw. bekomme, kann ich ja tatsächlich fahren, und selbst den Ring, den ich als Zeichen eines lebenslangen Bundes an meinem Finger trage, besteht aus einem Edelmetall, dessen aktueller Wert sich genau bestimmen lässt. Es schaut also so aus, dass mit der Semiose die Welt der Objekte quasi verdoppelt wird, dass neben der Ontologie eine Semiotik aufgebaut wird, an deren Ende alle Objekte zum Zeichen erklärt sind, d.h. wir haben dann eine ontische Ontologie und eine semiotische Ontologie, deren Verhältnis ferner nach Benses Fundamental-Axiom durch maximale Arbitrarität gekennzeichnet ist, da ja



„jedes beliebige Etwas“ zum Zeichen für (jedes beliebige Etwas) erklärt werden kann. Die semiotische Ontologie ist damit aber nichts anderes als die theoretisch maximal willkürliche Abbildung von Objekten zu Objekten aus der ontischen Ontologie. Allein praktische Gründe werden mich daran hindern, z.B. die Zugspitze oder den Tadj Mahal anstatt meines Taschentuches zum Zeichen für Etwas zu erklären.

3. Eine weitere Frage betrifft die Subjektrelevanz von Zeichen. Wenn ich wiederum mein Taschentuch verknote, dann erkläre ich ja dieses Objekt als Zeichen für mich, d.h. wenn ich sterbe, bevor das Zeichen für mich Gültigkeit bekommt, und meine Frau findet es, dann findet sie ein Objekt, dessen Zeichenstatus sie bestenfalls aus seiner Verknotung, d.h. Verfremdung, errät. Sie ist aber in aller Regel völlig unfähig, mein Zeichen zu interpretieren, wird es aufknüpfen und somit das Objekt seinen Verwandten im Wäschekorb übergeben. Ist ein Zeichen aber nicht nur für ein Individuum, sondern für eine ganze Gemeinschaft relevant, wie etwa ein Stoppschild an einer Strasse, so besteht es unabhängig von meinem eventuellen Dahinscheiden. Da in diesem Fall das Objekt sogar nur für das Zeichen designt wurde und streng genommen mit ihm als Zeichenobjekt oder Objektzeichen zusammenfällt, kann ich in diesem Fall auch die Semiose nicht mehr rückgängig machen. Ich kann zwar das Taschentuch wieder auffalten und es wie ehemals als Objekt verwenden, ich werde aber kaum die Farben des Verkehrszeichens abkratzen und den metallischen Träger einschmelzen, in seine Bestandteile zerlegen und sie den richtigen Geistes und am Ende den richtigen Gebirgen in den richtigen Ländern zurückgeben. Anhand dieser zwei einfachen Beispiele lernen wir also, dass es umkehrbare und nicht-umkehrbare Semiosen gibt und dass nicht-umkehrbare Semiosen an Gemeinschaften von Subjekten gebunden sind.

4. Ein besonders schwieriges Problem (das ebenfalls in der Peirce-Bense-Semiotik bisher nicht einmal aufgeworfen wurde) ist die Frage nach der Primordialität von Zeichen und Semiose. Z.B. lesen wir im „Wörterbuch der Semiotik“: „Semiose, ein Terminus, den Peirce für ‚Zeichenprozesse‘, also für Prozesse, die sich an Zeichen bzw. über Zeichenrepertoires abspielen, einführte. ‚Semiosis‘, so drückte er sich aus, ist eine ‚cooperation of three subjects, such as a sign, its object and its interpretant‘, d.h., jeder Prozess, der eine triadische Zeichenrelation verwirklicht, stellt eine Semiose, einen Zeichenprozess, dar“ (Bense/Walther 1973, S. 91). Wie man sofort erkennt, setzt nach Peirces Definition der Begriff der Semiose also den Begriff des Zeichens voraus. Allerdings kann es wohl kein Zeichen geben, dem nicht der Prozess der Semiose

präexistent ist, denn wie sonst könnte ein Objekt nach dem Fundamentalaxiom zum Zeichen qua Metaobjekt erklärt werden? Wenn es aber tatsächlich so sein sollte, dass wir

Semieose  $\leftrightarrow$  ZR

haben, und zwar im Sinne von

Semieose =  $f(\text{ZR}) \wedge \text{ZR} = f(\text{Semiose})$ ,

dann haben wir eine Proömielrelation vor uns, die in der klassischen Logik verboten ist. Das würde aber bedeuten, dass das Zeichen nicht von seinem Objekt her, sondern von derjenigen logischen Stufe her eingeführt werden müsste, auf der proömielle Relationen sinnvoll sind, d.h. auf der Ebene der Keno- und der Morphogrammatik. Von hier aus „erweisen sich Zeichen (...) als Reduktionen oder Kristallisationen von Kenogrammen. Die Semiotik kann Zeichen nur als aus einem schon gegebenen Alphabet stammend voraussetzen, den semiotischen Zeichen ist aber die Semiose, der Prozess der Zeichengenerierung selbst, vorgeordnet. Die Kenogrammatik, insofern sie den Prozess der Semiose notierbar macht, muss also der Semiotik systematisch vorgeordnet werden, da sie diese überhaupt ermöglicht“ (Mahler 1993, S. 34).

5. Damit kommen wir zum wohl erregendsten bisher vorgefundenen Fundamentalparadox der gesamten Semiotik:

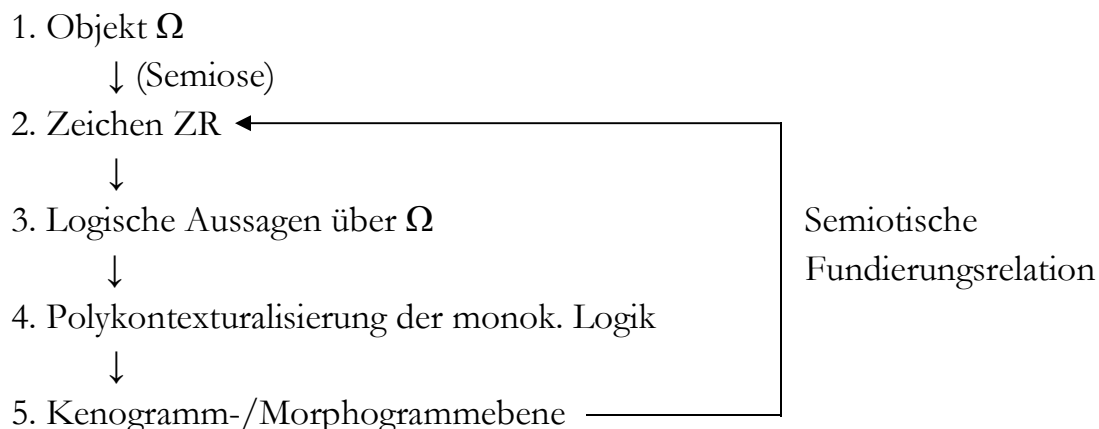
**Semiotisches Fundamentalparadox:** Die Aussage des semiotischen Fundamentalaxioms, dass das Zeichen ein metaobjektiviertes Objekt sei, d.h. aus einem Objekt eingeführt sei, führt letztlich zum Schluss, dass das Objekt aus einem Zeichen eingeführt wurde.

Um die zwei besprochenen Möglichkeiten, ein Zeichen einzuführen, zu kontrastieren, seien sie kurz, aber detailliert dargestellt:

### 5.1. Einführung eines Zeichens aus einem Objekt (semiotisches Fundamentalaxiom):

Am Anfang dieses Prozesses steht ein Objekt,  $\Omega$ , welches zum Zeichen erklärt wird. Erst dann, wenn  $\Omega \rightarrow ZR$  abgeschlossen ist, ist also eine Aussage über das Objekt  $\Omega$  möglich. Und erst dann, wenn eine Aussage über  $\Omega$  möglich ist, kann die Logik einsetzen, welche bekanntlich Aussagen über Objekte zu ihrem Gegenstande hat. Diese Logik ist aber die seit Aristoteles gebräuchliche, 2-wertige und damit monokontexturale Logik, auf der nicht nur unsere gesamte Wissenschaft, sondern auch unser Denken basiert. Erst an diesem Punkt kann also die Rekonstruktion der Polykontexturalität aus der Monokontexturalität dieser Logik stattfinden. Dazu müssen die Gesetze des Denkens und damit die auf dem Identitätssatz beruhenden Dichotomien aufgelöst und die 2-wertige Logik in eine Logik mit mehr als einer Subjektstelle umgewandelt werden. Diese Subjektstellen bestimmen die Wertigkeit der die 2-wertige Logik erweiternden n-wertigen Logik, die damit in Form von Kenogrammen oder Stellenwerten dargestellt werden kann, welche die ontologischen Stellen für diese Subjekte freihalten. Mathematisch funktioniert diese Reduktion der 2-wertigen auf eine n-wertige Logik (die also gewissermassen gleichzeitig eine Erweiterung oder besser: Ausweitung ist) durch Wert-, Iterations- und Positionsabstraktion (vgl. Kronthaler 1986, S. 26 ff.), wodurch man die drei Ebenen qualitativer Zahlen: die Proto-, die Deutero- und die Trito-Ebene erreicht. Wie in Toth (2009a) gezeigt wurden, können umgekehrt durch Wertbelegung semiotische Systeme aus Trito-Zahlen-Systemen hergestellt werden, so dass also die Keno- und Morphogrammebene eine noch tiefere Reduktionsstufe darstellt als die Ebene der Zeichen.

Der hier dargestellte Prozess kann wie folgt schematisiert werden:



## 5.2. Einführung des Zeichens aus dem Kenogramm

Nach dem bisher Gesagten können wir gleich zum Schema übergehen:

1. Kenogramm/Morphogramm



2. Durch Wertbelegung Konstruktion der polykontexturalen Logik sowie  
Mathematik der Qualitäten



3. Konstruktion der „Poly-Semiotik“ entweder durch Kontexturierung (Kaehr 2008)  
oder durch Belegung der Morphogramme mit semiotischen Werten (Toth 2003,  
2009b)



4. Monokontexturalisierung, d.h. Abbildung der mit semiotischen Werten belegten  
Morphogramme auf die Peirceschen Zeichenklassen



5. Definition des Zeichens

Wie man sieht, gibt es bei dieser 2. Methode überhaupt keinen Platz mehr für das Objekt. Vertritt man den Standpunkt, dass es keine kenogrammatische Ebene geben könne ohne den Begriffs des Objekts, d.h. also dass die kenogrammatische Ebene die (polykontexturale) Ontologie voraussetze, dann landen wir beim Modell Nr.1 und damit in einem unendlichen Zirkel. Ferner müsste man dann zeigen können, dass die Entwicklung

Objekt → Keno → Zeichen

wirklich real stattfinden kann, denn sie impliziert, dass es (bereits auf die polykontexturale Ebene reduzierte) logische Aussagen gibt, bevor es Zeichen gibt, d.h. eine Primordialität der Logik vor der Semiotik, was in Widerspruch zum Modell Nr. 1 steht und zur natürlichen Reihenfolge, dass es zuerst Aussagen geben muss, die ja erst durch Zeichen möglich sind, bevor eine logische Fassung dieser Aussagen davon abstrahiert werden kann. Wie man sieht, ist also das 2. Modell klar falsch und somit das 1. Modell korrekt. Andernfalls hätten wir uns in Zukunft daran gewöhnen müssen, dass

die Zeichen ihren Objekten präexistent sind und dass somit Objekte aus Zeichen erklärt werden, in Verletzung des Benseschen Fundamentalaxioms.

Da nun aber das 1. Modell korrekt ist, folgt daraus ein ganz bemerkenswerter Schluss:

**Theorem über die Fundamentalsemiose:** Am Anfang jeder Semiose steht das Objekt, das zum Zeichen erklärt wird (bzw., im Falle von natürlichen Zeichen, als Zeichen interpretiert wird), und an ihrem Ende steht das Kenogramm.

Da jedoch Kenogramme in keiner Weise in Objekte verwandelt werden können, haben wir eine nicht-zyklische und somit eine hierarchische Relation vor uns. Daraus folgt also, dass das Kenogramm nicht zuunterst steht in der semiosichen Hierarchie, sondern zuoberst, d.h. es bildet den Schlusspunkt in der Fundamentalsemiose, die mit der Metaobjektivierung des Objektes beginnt und also mit der Kenose endet. Die Lebenssphäre eines Zeichens ist somit das Intervall zwischen Objekt und Keno, der Geltungsbereich seiner Wissenschaft, der Semiotik, das Intervall zwischen Ontologie und Kenogrammatik. Wenn also nach jüdisch-christlicher Überlieferung die Ontologie durch die Semiotik entstanden ist, d.h. die Objekte durch das Wort im Sinne von Gen. 1, 1 hergestellt wurde, stellt somit die Semiotik den genau umgekehrten Prozess der Herstellung von Zeichen aus den Objekten dar. Semiotik ist konverse Schöpfung.

## **Bibliographie**

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds.

<http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Semiotics-in-Diamonds/Semiotics-in-Diamonds.html> (2008)

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten. Frankfurt am Main 1986

Mahler, Thomas, Morphogrammatik. Klagenfurt 1993

Toth, Alfred, Die Hochzeit von Semiotik und Struktur. Klagenfurt 2003

Toth, Alfred, Das Zeichen als qualitative Zahl. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Was ist überhaupt ein Zeichen? In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

## Identität und Negation, Eigenrealität und Kategorienrealität

1. In Toth (2010) wurde gezeigt, dass der logische Negator in 2-wertigen semiotischen Systemen auf den Konversionsoperator zurückgeführt werden kann und dass der letztere also der schon von Bense gesuchten „semiotischen Negation“ entspricht. Dabei ist also zu betonen, dass semiotische Negation insofern stark von logischer Negation unterschieden ist, also erstere von einem semiotischen Wertvorrat primär unabhängig ist, als er nur die Positionen von Haupt- und Stellenwert in einem dyadischen Subzeichen vertauscht, vgl.

$$N(a.b) = (b.a) \quad (a, b \in \{1, 2, 3\}),$$

während die Negation von z.B. 1 abhängig ist, wie viele Werte die betreffende Logik zur Verfügung hat, in der die Negation gelten soll:

$$N(1) = 0, 3, 4, 5, \dots$$

2. Werden nun ganze triadische oder höhere (tetradische, pentadische, hexadische, ..., n-adische) Relationen verkehrt, so ist zunächst in Erinnerung zu rufen, dass sich diese wegen der n-adisch/n-a/otomischen Struktur der semiotischen Relationen immer aus dyadischen Subzeichen zusammensetzen, wenigstens solange, als man nicht von höheren als 2-dimensionalen Semiotiken ausgeht (so sind in einer 3-dimensionalen Semiotik die Subzeichen triadisch, in einer 4-dimensionalen tetradisch, ..., in einer n-dimensionalen Semiotik n-adisch). Das bedeutet also, dass bei der Konversion einer n-adischen semiotischen Relation nur die Reihenfolge der Subzeichen vertauscht wird, diese selbst aber nicht konvertiert werden. Hier finden wir also einen Unterschied zwischen Konversion und Dualisation vor, wie er sonst nur beim Übergang von mono- zu polykontexturalen semiotischen Systemen aufscheint, wo  $\times(a.b) \neq (a.b)^\circ$  gilt, denn wir haben natürlich

$$\times(a.b \ c.d \ e.f) = (f.e \ d.c \ b.a), \text{ aber}$$

$$(a.b \ c.d \ e.f)^\circ = (e.f \ c.d \ a.b) \text{ und daher}$$

$$(f.e \ d.c \ b.a) \neq (e..f \ c.d \ a.b).$$

3. Der Unterschied zwischen Konversion und Dualisation fällt allerdings für eine einzige Relation, die Relation der Genuinen Kategorien oder Kategorienrealität, zusammen, insofern hier gilt:

$$\begin{aligned} \times(3.3 \ 2.2 \ 1.1) &= (1.1 \ 2.2 \ 3.3) \\ (3.3 \ 2.2 \ 1.1)^\circ &= (1.1 \ 2.2 \ 3.3) \text{ und daher} \\ (3.3 \ 2.2 \ 1.1) &= (3.3 \ 2.2 \ 1.1). \end{aligned}$$

Daraus können wir nun folgern: Semiotische Identität ist Koinzidenz von Konversion und Dualität.

Nehmen wir dagegen die Zeichenklasse der Eigenrealität, welche bekanntlich mit ihrer Realitätsthematik dualidentisch ist:

$$\begin{aligned} \times(3.1 \ 2.2 \ 1.3) &= (3.1 \ 2.2 \ 1.3), \text{ aber} \\ (3.1 \ 2.2 \ 1.3)^\circ &= (1.3 \ 2.2 \ 3.1) \text{ und daher} \\ (3.1 \ 2.2 \ 1.3) &\neq (1.3 \ 2.2 \ 3.1), \end{aligned}$$

d.h. sie unterscheidet sich punkto logischer Differenzierung von Identität und Negation in nichts von den übrigen neun Peirceschen Zeichenklassen., in Sonderheit fallen Konversion und Dualisation hier nicht zusammen. Allerdings sieht man, das hier gilt:

$$\begin{aligned} (3.1)^\circ &= (1.3) \\ (2.2)^\circ &= (2.2) \\ (1.3)^\circ &= (1.3), \end{aligned}$$

d.h. bei der Eigenrealität werden im Gegensatz zur Kategorienrealität die Werte tatsächlich vertauscht, d.h. die semiotischen Werte links und rechts des Gleichheitszeichens verhalten sich wie Position und Negation in der Logik (wobei semiotisch wiederum der Wertevorrat keine Rolle spielt). Wir können also folgern: Semiotische Negation ist Nicht-Koinzidenz von Konversion und Dualität.

Abschliessend sei nochmals betont, dass der semiotische Wertevorrat im Gegensatz zum logischen irrelevant ist, d.h. es spielt keine Rolle, wie die (a.b) bestzt sind,

wesentlich ist nur, dass  $(a.b)^{\circ} = (b.a)$  ist, d.h. es ist unsinnig, feststellen zu wollen, ob etwa 2 oder 3 die semiotischen Negation von 1 ist, da die Semiotik ein Fundierungs- und kein Folgerungssystem ist. Damit steht aber fest, dass die Konversion und weiter die Unterscheidung von Konversion und Dualisation allgemeinere und daher „tieferliegende“ Faktoren sind als die Negation.

## **Bibliographie**

Toth, Alfred, Identität und Negation aus Konversion. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009



## Zu einer semiotischen Filmtheorie

1. Wir gehen wieder aus von der folgenden allgemeinen Form der sogenannten erweiterten Zeichenklasse

Zkl(erw) = (3.a b.c 2.d e.f 1.g h.i).

Wie in Toth (2010) festgestellt, gilt für Topik-Reihen, Kausal-Ketten und Story-Schemata:

Zkl(TOP) = (3.1 a.b 2.c d.e 1.f g.h)

Zkl(KAU) = (3.2 a.b 2.c d.e 1.f g.h)

Zkl(STO) = (3.3 a.b 2.c d.e 1.f g.h)

2. Wir können dann unterscheiden zwischen **homogenen** Zeichenklassen der Form

Zkl (hom): (3.a 3.b 2.c 2.d 1.e 1.f),

und **inhomogenen Zeichenklassen** der Form

Zkl (het): (3.a b.c 2.d e.f 1.g h.i) ( $b \neq 3$ ,  $e \neq 2$ ,  $h \neq 1$ )

3. Zeichnet man die Zeichenklassen in die Grosse Matrix ein (vgl. Bense 1986, S. 20 ff.), so kann man Differenzschemata bzw. „generative Einflussfelder“ (Steffen 1981, S. 48) bestimmen, und zwar zwischen

1. verschiedenen Zkln bzw. ihren dualen Rthn,

2. primären und sekundären Thematisierungen der gleichen Zkln bzw. ihren dualen Rthn,

3. verschiedenen Zkln/Rthn und ihren jeweiligen primären und sekundären Thematisierungen,

und zwar jeweils gesondert für homogene und inhomogene Zeichenklassen.

Da wir ausgegangen sind von

Zkl (hom): (3.a 3.b 2.c 2.d 1.e 1.f),

Zkl (het): (3.a b.c 2.d e.f 1.g h.i) ( $b \neq 3$ ,  $e \neq 2$ ,  $h \neq 1$ ),

haben wir also für die 3 möglichen Fälle

1. Verschiedene Zkln bzw. ihren dualen Rthn:

1.1. Homogener Fall

(3.a 3.b 2.c 2.d 1.e 1.f)  $\rightarrow$  [[[id3, [a.b]], [ $\beta^\circ$ , [b.c]], [id2, [c.d]], [ $\alpha^\circ$ , [d.e]], [id1, [e.f]]]

1.2. Inhomogener Fall

(3.a b.c 2.d e.f 1.g h.i)  $\rightarrow$  [[[3.b], [a.c], [b.2], [c.d], [2.e], [d.f], [e.1], [f.g], [1.h], [g.i]]]

2. primären und sekundären Thematisierungen der gleichen Zkln bzw. ihren dualen Rthn:

$$\left( \begin{array}{l} \text{[[[id3, [a.b]], [ $\beta^\circ$ , [b.c]], [id2, [c.d]], [ $\alpha^\circ$ , [d.e]], [id1, [e.f]]]} \\ \text{[[[3.b], [a.c], [b.2], [c.d], [2.e], [d.f], [e.1], [f.g], [1.h], [g.i]]]} \end{array} \right)$$

3. verschiedenen Zkln/Rthn und ihren jeweiligen primären und sekundären Thematisierungen, indem ausgeht von (3.a 3.b 2.c 2.d 1.e 1.f) / (3.g 3.h 2.i 2.j 1.k 1.l) sowie (3.a b.c 2.d e.f 1.g h.i) / (3.j k.l 2.m n.o 1.p q.r) und wie unter 1. und 2. verfährt.

### Bibliographie

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Steffen, Werner, Zum Aufbau ästhetischer Zustände von Bildwerken. Diss. Stuttgart 1981

Toth, Alfred, Semiotische Filmtheorie I-IV. In: EJMS 2010a, b, c,d 1.4.2010

# Ein gestalttheoretisches Modell für die kleine und die grosse semiotische Matrix

## Ein gestalttheoretisches Modell für die kleine und die grosse semiotische Matrix

1. Eines derjenigen Probleme, welches zu der von Bense anvisierten „semiotischen Modelltheorie (Bense 1983, S. 129) gehört, ist die Frage der Interpretation der numerischen und modal Kategorien der kleinen und der grossen Matrix. Die grosse Matrix stellt dabei eine besondere Schwierigkeit dar, da sie  $9 \times 9 = 81$  Subzeichenpaare enthält und damit einen viel höheren modelltheoretischen Abstraktionsgrad verlangt als die kleine semiotische Matrix mit ihren nur 9 Subzeichen.

2. Das bisher universellste, d.h. von den zu fundierenden metasemiotischen Systemen unabhängigste semiotische Modell für die kleine Matrix stammt von Bense (1979, S. 61):

|             |            |                |
|-------------|------------|----------------|
| Qualität    | Quantität  | Essenz         |
| Abstraktion | Relation   | Komprehension  |
| Konnexion   | Limitation | Komplettierung |

Das Hauptproblem dieses Modells ist, dass es sich nicht an eine präsemiotische Matrix anschliessen lässt, d.h. an eine, die auf der sog. Werkzeugrelation (Bense 1981, S. 33)

|        |            |          |
|--------|------------|----------|
| Mittel | Gegenstand | Gebrauch |
|--------|------------|----------|

beruht, denn besonders die (trichotomisch wie triadisch) drittheitlichen Kategorien sind zu abstrakt. (Es wäre wohl fragwürdig, was die Essenz, Konnexion, Limitation und Komprehension eines Hammers wäre.) Da der präsemiotische Raum zwischen dem „ontologischen“ und dem „semiotischen Raum“ vermittelt (Bense 1975, S. 65 f.), muss die modelltheoretische Interpretation also „objekt-näher“ sein, allerdings auch etwas abstrakter als diejenige der Kategorien der obigen Objektrelation. Statt Mittel – Gegenstand – Gebrauch setzen wir vorschlagsweise



denn jeder zufällig gefundene und perzipierte Gegenstand wird von unseren Sinnen automatisch im Hinblick auf diese drei Kategorien oder Parameter klassifiziert (vgl. Joedicke 1985, S. 10): Z.B. unterscheiden ja die meisten Sprachen zwischen Kieselsteinen, Kopfsteinen, Felsen, im Engl. sind es z.B. pebble, cobble, boulder, rock. Dass gewisse Steine wegen ihrer Form die Funktion von Werkzeugen (wie z.B. eines Hammers) ausüben können, dass dies gewusst wurde, davon zeugen die ältesten Fundstücke unserer Zivilisationen. Und dass Berge aufgrund von Ihrer Gestalt Namen erhielten, davon zeugen ebenfalls schon die ältesten Schichten der Oronymie, des Teilgebietes der Onomasiologie der Ort- und Flurnamen (z.B. Vrenelis Gärtli, Kreuzkofel, La Diavolezza, im NW New Mexicos der Shiprock, usw.).

3. Im folgenden geht es nun darum, zunächst ein Modell der kleinen Matrix aufzustellen, d.h. Form der Form, Form der Funktion, Form der Gestalt usw. zu bestimmen. Unser Vorschlag sieht wie folgt aus:

|          | Form       | Funktion    | Gestalt   |
|----------|------------|-------------|-----------|
| Form     | Material   | Verbindung  | Gerüst    |
| Funktion | Einteilung | Transparenz | Struktur  |
| Gestalt  | Geometrie  | Topologie   | Stilistik |

Demnach bekommen wir Funktionsgleichungen der Form

Form(Materie) = Material

Form(Funktion) = Verbindung

Form(Gestalt) = Gerüst

Funktion(Materie) = Einteilung

Funktion(Funktion) = Transparenz, usw.

Jeder dieser 9 Modellbegriffe muss nun für die Grosse Matrix 9fach unterteilt werden können, damit das Modell seine „Universalität“ besteht. Das bedeutet, dass wir z.B. auch das Material nochmals 3-fach in formaler, 3-fach in funktionaler und 3-fach in gestalttheoretischer Weise untersuchen müssen. So kann man also z.B. bei die Materie weiter hinsichtlich ihrer Funktion als Quali-, Sin- und Legizeichen; Icon, Index und Symbol; Rhema, Dicient und Argument untersuchen. Die Schwierigkeiten, die sich hierbei anhand von bestimmten zu klassifizierenden Objekten ergibt dürfte als Mass für die relative Semiotizität dieser Objekte

herangezogen werden können. Andererseits zeigt sich aber auch, wie sinnvoll bzw. weniger sinnvoll die Ersetzung einfacher dyadischer Subzeichen durch Paare, evtl. sogar durch Tripel, allgemein: n-Tupel von Subzeichen sein kann.

4. Das hiermit vorgeschlagene Modell bewährt sich definitionsgemäss natürlich bei „objektnahen“ metasemiotischen Systemen, wie z.B. bei Architektur, Technik, Design usw. Als tentativen Vorschlag sei hier eine spezifisch architektursemiotische Interpretation beigebracht:

|          | Form                 | Funktion         | Gestalt      |
|----------|----------------------|------------------|--------------|
| Form     | Holz, Stein, Lehm    | Verschraubung    | Trägerbalken |
| Funktion | Treppe, Tür, Fenster | Sichtbeziehungen | Grundrisstyp |
| Gestalt  | Geometrie            | Topologie        | Stilistik    |

Auch hier geht anschliessend natürlich wieder darum, z.B. Treppen, Türen und Fenster, d.h. allgemein iconische Versatzstücke, wiederum 9-fach feinzuklassifizieren, also z.B. ob das Fenster einen Holzrahmen hat, oder es gekippt werden kann, ob es Butzenscheibungen oder Verätzungen aufweist; ob es nach innen oder nach aussen geöffnet werden kann, ob von beiden Seiten einsehbar ist, ob es ein Einzelfenster oder Teil einer Fensterreihe ist; welche geometrische Form es hat, wie die Verhältnisse der Fenstergrösse zur Hauswand sind, wie es stilistik, d.h. bau-, architektur- und kunsthistorisch eingeordnet werden kann.

#### **Bibliographie**

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1983

Joedicke, Jürgen, Raum und Form in der Archtiektur. Stuttgart 1985

# Multivariate Semiotik und Modelltheorie

## Multivariate Semiotik und Modelltheorie

1. Trotz Benses erster Forderung einer Modelltheorie für die Semiotik (1986, S. 129) und einigen Versuchen, die ich selbst unternommen habe (z.B. Toth 2008, S. 185-199), sind wir noch meilenweit vom Ziel entfernt. Ich glaube jedoch, dass die von mir in mehreren Arbeiten eingeführte multivariate Semiotik (vgl. z.B. Toth 2009) eine viel bessere Basis für eine semiotische Modelltheorie darstellt als die Peircesche Basistheorie.

**2.1. Definition:** Eine S-Struktur ist ein Paar  $\underline{A} = (A, \alpha)$  mit den folgenden Eigenschaften

a)  $A \neq \emptyset$

b)  $\alpha$  ist eine auf S definierte Abbildung. Für sie gilt:

b1) Für jedes n-stellige R aus S ist  $\alpha(R)$  eine n-stellige Relation über A.

b2) Für jedes n-stellige Funktionssymbol f aus S ist  $\alpha(f)$  eine n-stellige Funktion über A.

b3) Für jede Konstante c aus S ist  $\alpha(c)$  ein Element von A.

Wie man leicht einsieht, motiviert Definition 2.1., und zwar unabhängig von der vorwiegend ontologischen Argumentation in Toth (2009), die Einführung einer multivariaten Semiotik. Als informelle Motivation kann man vorbringen, dass in der Semiotik zwar ständig die Rede von aus einem „Repertoire“ selektierten Mitteln ist, dass aber nur diese Mittel in die Peircesche Zeichenrelation eingehen. Dasselbe gilt p.p. für das, was Walther Objektbereich und Interpretantenfeld genannt hat. Z.B. kann man mittels Objektbereichen Objektfamilien definieren. Man vergleiche etwa die völlig voneinander abweichenden Bezeichnungen der Biergläser nach ihren Größen und Formen in den Sprachen Europas (z.B.

schweizerisch Herrgöttli/Pfiff (1dl), Pfütze/Tschumpeli/Stängeli (2dl), Stange/Tulpe (3dl), Rugeli/Chrüegli (4dl), Grosses (5dl), etc. mit starken Abweichungen v.a. in der Achse St. Gallen – Zürich – Aargau). Als Beispiel für ein Interpretantenfeld kann man die teilweise stark abweichenden Perzeptionen von Probanden beim Übergang „kognitionsrelevanter“ Objekte wie etwa Tassen in Schalen nehmen.

Jedenfalls motivieren diese informellen Beispiele bereits den Ersatz der Peirceschen univariaten Zeichenrelation

$$PZ = (M, O, I)$$

durch die multivariante, auf Mengenrelationen bzw. Relationenmengen gegründete Zeichenrelation

$$ZR = \{\{M\}, \{O\}, \{I\}\}.$$

**2.2. Definition:** Eine Belegung in einer S-Struktur  $\underline{A}$  ist eine Abbildung  $\beta: \{\forall_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rightarrow A$  der Menge der Variablen in den Träger  $A$ .

$$\{M\} = \{M_1, M_2, M_3, \dots, M_n\}$$

$$\{O\} = \{O_1, O_2, O_3, \dots, O_n\}$$

$$\{I\} = \{I_1, I_2, I_3, \dots, I_n\}$$

Eine semiotische Abbildung  $\beta$  ordnet nun den  $M_n$ ,  $O_n$  und  $I_n$ , die zunächst einmal blosse Variablen sind, konkrete Mittel, Objekte und Interpretanten zu. Z.B. kann man  $M_n$  als Teilmengen die Mengen der Form-, Farb-, Intensitäts-, Lichtqualitäten usw. zuordnen. Die  $O_n$  sind dann z.B. die Mengen der Objektfamilien (etwa der Türen-, Fenster-, Grundriss-, Dachtypen usw.), und die  $I_n$  sind die kulturspezifisch determinierten Architekten, Planer, Innenarchitekten, Designer, Häusermakler, Mieter usw., woraus sich z.B. pro Gebiet unterschiedliche Baustile (etwa die Trulli in Apulien, die Holzkirchen in Siebenbürgen oder die Grubenmann-Brücken in Ausserrhoden) erklären lassen.



Mit Hilfe der Struktur und der Abbildung kann man nun die Interpretation wie folgt definieren:

2.3. **Definition:** Eine S-Interpretation  $\mathfrak{I}$  ist ein Paar  $(\underline{A}, \beta)$ , bestehend aus einer S-Struktur  $\underline{A}$  und einer Belegung  $\beta$  in  $\underline{A}$ .

2.4. Definition: a) Für eine Variable  $x$  sei  $\mathfrak{I}(x) := \beta(x)$ .

b) Für  $c \in S$  sei  $\mathfrak{I}(c) := c^{\underline{A}}$ .

c) Für  $n$ -stelliges  $f \in S$  und Terme  $t_1, \dots, t_n$  sei  $\mathfrak{I}(ft_1 \dots t_n) := f^{\underline{A}}(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n))$ .

Die Modellbeziehung präzisiert, wann ein Ausdruck bei einer Interpretation in eine wahre Aussage übergeht.

Z.B. sei  $\{M_n\} = \{\text{Baum, planta, tree, fa, pluplubasch}\}$ . Sei nun  $\{M_i\}$  das Repertoire der Wörter der deutschen Sprache. Wir bezeichnen die Elemente von  $\{M_n\}$  mit  $t_1, t_2, \dots, t_5$ . Dann gilt offenbar:

$\{M_i\} \models t_1, \neg\{M_i\} \models t_2, \neg\{M_i\} \models t_3, \neg\{M_i\} \models t_4, \neg\{M_i\} \models t_5$ . Für das (von Hugo Ball erfundene) Wort  $t_5$  gilt ferner  $\neg\{M\} \models t_1$ , d.h. es gehört dem Repertoire keiner Sprache der Welt an.

2.5. **Definition (Modellbeziehung):** Für alle  $\mathfrak{I} = (\underline{A}, \beta)$  setzen wir:

$\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$  gdw  $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$

In verbalen Zeichensystemen, wo die Synonymie ja nicht dem logischen Identitätssatz folgt, ist streng genommen die Modellbeziehung nie erfüllt, d.h. es gilt  $\neg\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2$  gdw  $\mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2)$ .

vgl. schlagen  $\approx$  hauen, prügeln, aber: Es hat 12 Uhr geschlagen/\*gehauen/  
\*geprügelt.

**2.6. Definition (Folgerungsbeziehung):**  $\varphi$  folgt aus  $\Phi$  (kurz:  $\Phi \models \varphi$ ) gdw jede Interpretation, die Modell von  $\Phi$  ist, ist auch Modell von  $\varphi$ .

Statt  $\{\psi\} \models \varphi$  schreibt man auch  $\psi \models \varphi$ .

Damit kann man (sowohl in flexivischen wie in agglutinierenden) Sprachen die Ableitung von Wortstämmen als Elemente des Repertoires der betreffenden Sprache bestimmen.  $\Phi$  enthält in diesem Fall also nicht nur die Stämme, sondern auch die Affixe, und wenn immer zwei Wörter A und B sowie ein Affix A' Elemente des Repertoires sind, und es eine Interpretation für (A-A') gibt, dann gibt es auch eine Interpretation von (B-A'). Sei z.B. A = ung. nézni „schauen“, B = látni „sehen“, A' = ás (Zustandsaffix der Verbalhandlung). Nun gibt es eine Interpretation, die ein Modell für nézés ist, also gibt es auch eine Interpretation, die Modell für látás ist.

**2.7. Definition:** Ein Ausdruck  $\varphi$  heisst allgemeingültig (kurz:  $\models \varphi$ ) gdw  $\emptyset \models \varphi$

Semiotisch würde  $\emptyset \models \varphi$  bedeuten, dass es Objekte gibt, denen Zeichen (aufgrund von „intrinsischen“ Eigenschaften) eindeutig zugeordnet sind. Solche Fälle treten zwar desöfters in Lewis Carroll's „Alice in Wonderland“ auf, es gibt sich allerdings aus prinzipiellen Gründen realiter nicht, denn die eindeutige Zuordnung 1 Zeichens zu 1 Objekt würde die Austauschbarkeit von Zeichen und Objekt implizieren und damit natürlich die Unerkennlichkeit bzw. Nicht-Differenzierbarkeit von Zeichen und Objekt. Wie man weiss, sind nicht einmal Onomatopoeitika semiotisch allgemeingültig (Kikerikii, Cocorico, Cockadoodledoo, Cocococo, usw.)

**2.8. Definition:** Ein Ausdruck  $\varphi$  heisst erfüllbar (kurz: Erf  $\varphi$ ) gdw es eine Interpretation gibt, die Modell von  $\varphi$  ist. Eine Menge  $\Phi$  von Ausdrücken heisst erfüllbar (kurz: Erf  $\Phi$ ) gdw es eine Interpretation gibt, die Modell aller Ausdrücke aus  $\Phi$  ist.

Hierzu Beispiele aus allen drei Bezügen des Zeichens. Sei  $M_1$  = Rep. der dt. Sprache,  $M_2$  = Rep. der franz. Sprache,  $M_3$  = Rep. der ital. Sprache,  $M_4$  = Rep. der ung. Sprache,  $M_5$  = Rep. der engl. Sprache.

$\{M_1, M_2, M_3, M_4\} \text{ Erf } \neg \text{fa}$

$M_1 \text{ Erf Baum}$

$\{M_1, M_2, M_4, M_5\} \text{ Erf } \neg \text{planta}$

$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\} \text{ Erf } \neg \text{pluplusch}$

Sei  $(M_1 \rightarrow O_1)$  die Bezeichnungsemantik der deutschen Sprache (vgl.  $M_1$ ), dann gilt z.B.

$(M_1 \rightarrow O_1) \text{ Erf } \neg \{\text{Lichtstaude, Amentreppe, Atemklirren [P.Celan]}\}$

Sei  $(O_1 \rightarrow I_1)$  die Bedeutungsemantik der deutschen Sprache, dann gilt z.B. für Komposita

$(O_1 \rightarrow I_1) \text{ Erf } \{\text{Schleswig-Holstein, Tiszen-Bornemissa, Reichenau-Tamins, Ludwigshafen-Mannheim}\}$

$(O_1 \rightarrow I_1) \text{ Erf } \neg \{\text{Württemberg-Baden, Reichenau-Meinau, Kreuzlingen-Konstanz}\}$ .

Theoretisch kann man noch Erfüllungsrelation von semiotischen Gebrauchsfunktionen definieren, d.h. von  $(I_1 \rightarrow M_1)$ . Beispiele könnten sein:

$(I_1 \rightarrow M_1) \text{ Erf (Bretter), aber Erf } \neg \text{(Better)}$

$(I_1 \rightarrow M_1) \text{ Erf (gesagt), aber Erf } \neg \text{(getragen)}$

$(I_1 \rightarrow M_1) \text{ Erf (Helligkeit), aber Erf } \neg \text{(Dunkeligkeit)}$

**2.9. Definition:** Zwei Ausdrücke  $\varphi$  und  $\psi$  heißen logisch äquivalent (kurz:  $\varphi \equiv \psi$ ) gdw  $\varphi \models \psi$  und  $\psi \models \varphi$ . Zwei Ausdrücke sind also genau dann logisch äquivalent, wenn sie bei denselben Interpretationen gelten.

Vgl. 2.5.

### **Bibliographie**

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al., Einführung in die mathematische Logik. 4. Aufl. Heidelberg

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2007, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Elemente einer multivarianten Semiotik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

# Die Selbstenthaltung des Zeichens

## Die Selbstenthaltung des Zeichens

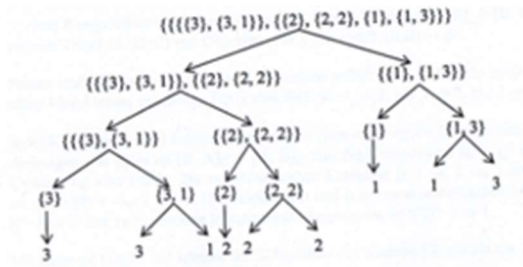
1. Wie Bense (1979, S. 53, 67) eindrücklich gezeigt hatte, ist das Zeichen vom mengentheoretischen Standpunkt aus keine simple „Zusammenfassung von Objekten“, sondern diese Objekte sind wiederum in drei Mengen eingeteilt, die sich alle selbst enthalten:

$$ZR = \{\{M\}, \{\{M, O\}, \{M, O, I\}\}\}.$$

2. Eine solche Menge aber widerspricht (worauf ich bereits in Toth 2006, S. 17 ff.) hingewiesen hatte, dem Fundierungsaxiom (FA) der Zermelo-Fränkelschen Mengentheorie, denn sie führt zu sogenannten Mirimanoff-Folgen

$$\dots \in x_2 \in x_1 \in x_0$$

wodurch es allerdings erstmals möglich ist, Zirkularität in der Semiotik zu beschreiben. Z.B. hat die eigenreale Zeichenklasse  $x(3.1\ 2.2\ 1.3) = (3.1\ 2.2\ 1.3)$  folgende Ableitung:



Wie man aus der Definition von ZR sieht, taucht ja die triadische Drittheit einmal, die triadische Zweitheit zweimal und die triadische Erstheit dreimal auf. Streng genommen, müsste die Erstheit also 3mal und die Zweitheit 2mal eingeführt werden.

Aus der Definition des Zeichens mit „Anti-Fundierungs-Axiom“ (AFA) folgt ferner natürlich, dass die Vereinigung des Zeichens mit seinem Element die leere Menge ergibt:

$$ZR \cup \{ZR\} = \emptyset$$

Demnach enthält also das Pericesche Zeichen zweimal die leere Menge:

$$M \cup \{M\} = \emptyset \text{ (und zwar zweimal!)}$$

$$O \cup \{O\} = \emptyset$$

Indem aber der Interpretant selbst eine Drittheit ist, gilt

$$I = ZR$$

und damit auch

$$I \cup \{I\} = \emptyset.$$

Wir haben also

$$ZR \cup M \cup O \cup U = \{\emptyset \cup \{\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset, \emptyset\} \cup \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}\} = \emptyset.$$

In Sonderheit bildet also

$$M \cup O \cup I = \{\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset, \emptyset\} \cup \{\emptyset, \emptyset, \emptyset\}\}$$

eine Mirimanoff-Folge.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Von der hier demonstrierten Selbstenhaltung des Zeichens aus kann man sehr einfach die Frage nach der Anzahl der Zeichenklassen über der „verschachtelten“ triadischen Relation ZR lösen: {M} enthält genau die 3 Elemente {1.1, 1.2, 1.3}, also den Mittelbezug, {M, O} enthält genau die Kombinationen von {1.1, 1.2, 1.3} × {2.1, 2.2, 2.3}, also 9 Elemente, und {M, O, I} und damit ZR enthält genau die Kombinationen von {1.1, 1.2, 1.3} × {2.1, 2.2, 2.3} × {3.1, 3.2, 3.3}, d.h. 27 Zeichenklassen mit der Anzahlrelation 3 ⊂ 9 ⊂ 27. In der Sonderheit folgt aus dem für ZR gültigen AFA, dass es absolut keine (inner-)semiotischen Gründe dafür gibt, der Zeichenform ZR = (3.a 2.b 1.c) eine „Wohlordnung“ a ≤ b ≤ c aufzuoktroieren, um die Gesamtzahl möglicher Zeichenklassen von 27 auf 10 zu beschränken. Eine solche Limitation ist willkürlich und von AFA aus sogar falsch.

## Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

## Die Semiotik als Theorie

1. In ihrem Aufsatz „Ist die Semiotik überhaupt eine Wissenschaft?“ (1991) hat E. Walther die zur Beantwortung dieser Frage wichtige Teilfrage, ob die Semiotik überhaupt eine Theorie darstelle, ausgelassen. Diese Frage lässt sich mindestens mit Hilfe der Modelltheorie (deren Verwendung für die Semiotik Bense 1986, S. 129, explizit angeregt worden war) eindeutig beantworten.

2. **Definition:** Eine Menge  $S$  von Ausdrücken heisst eine Theorie gdw  $Cn(T) = T$ , d.h. wenn der auf  $T$  angewendete Hüllenoperator gerade die Menge dieser Ausdrücke erzeugt.

**Satz:** Ist eine Sprache  $\Lambda$  gegeben, dann gilt für beliebige  $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$ :

(1)  $\Sigma \subset Cn\Lambda(\Sigma)$  (Extensivität)

(2) Wenn  $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$ , so  $Cn\Lambda(\Sigma_1) \subset Cn\Lambda(\Sigma_2)$  (Monotonie)

(3)  $Cn\Lambda(Cn\Lambda(\Sigma)) \subset Cn\Lambda(\Sigma)$  (Abgeschlossenheit von  $Cn\Lambda$ )

Wie man leicht zeigen kann (vgl. z.B. Schwabhäuser 1970, Bd. 1, S. 43 f.), ist eine Menge  $S$  von Ausdrücken also eine Theorie gdw sie widerspruchsfrei ist, was gleichbedeutend damit ist, dass  $S$  ein Modell besitzt.

Noch einfacher kann man eine Theorie modelltheoretisch dadurch definieren, dass man von der Erfüllungsrelation  $Erf$  ausgeht (z.B. Ebbinghaus et al. 1996, S. 187):

**Definition:**  $S \subset \Lambda^0T$  [die Menge aller Sätze der Sprache  $\Lambda$ , A.T.] heisst eine Theorie, wenn  $S$  erfüllbar ist und wenn jeder  $T$ -Satz, der aus  $S$  folgt, bereits zu  $S$  gehört.

3. Wie man weiss, besteht die semiotische Sprache  $\Lambda$  aus den monadischen Relationen  $S_1 = \{.1., .2., .3.\}$ , den dyadischen Relationen  $S_2 = \{1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3\}$  und den triadischen Relationen, wobei die 10 Peirceschen Zeichenklassen eine Teilmenge der 27 kombinatorisch möglichen triadischen Zeichenrelationen sind. Hieraus schliessen wir aber sofort:

**Satz:** Die Semiotik ist nur dann eine Theorie, wenn alle  $33 = 27$  Zeichenrelationen erfüllbar sind.

**Beweis:** Andernfalls erzeugt der Hüllenoperator  $Cn$  neben den 10 Peirceschen Zeichenklassen 17 weitere produziert, die nicht zur Menge der Sätze von  $S$  gehören. ■

Skurrilerweise wäre sonst die kleine semiotische Matrix – obwohl sie doch Erzeugendenmatrix aller semiotischen Terme ist, selbst kein Teil der Theorie, denn sie enthält mit der Hauptdiagonalen eine ZR (3.3 2.2 1.1), die nicht Teil der 10 Peirceschen Zeichenklassen ist!

4. Ferner ist, wie man ebenfalls leicht zeigen kann, die Semiotik nur dann eine Theorie, wenn das Null-Zeichen  $\emptyset \subset S$  ist. Dies resultiert aus mindestens zwei Tatsachen.

4.1. Zu jeder Menge kann bekanntlich die Potenzmenge gebildet werden. Ferner ist die leere Menge Teilmenge jeder Menge, somit muss sie es auch von  $S$  sein:

$$\wp(S) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, (1.2), (1.3), (2.3), (1.2.3.) \}$$

4.2. Bekanntlich hat Bense (1979, S. 53) die Peircesche Zeichenrelation als verschachtelte Relation aus einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation eingeführt, so zwar, dass die monadische in der dyadischen und beide in der triadischen Relation inkludiert sind:

$$ZR = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I)))$$

Dieser Ausdruck ist aber dem folgenden mengentheoretischen äquivalent:

$$ZR = ZR = \{ \{M\}, \{ \{M, O\}, \{M, O, I\} \} \}.$$

Danach enthält sich aber das Zeichen qua  $\{M, O, I\}$  selbst, woraus folgt, dass in einer Mengenlehre, die eine dergestalt definierte ZR definieren kann, das Fundierungsaxiom von Zermelo-Fraenkel ausgeschlossen ist. In einer solchen Mengenlehre gilt daher, dass die Vereinigung einer Menge mit ihrem Element gleich der leeren Menge ist, also

$$M \cup \{M\} = O \cup \{O\} = I \cup \{I\} = \{M, O\} \cup \{ \{M, O\} \} = \{O, I\} \cup \{ \{O, I\} \} = \{M, I\} \cup \{ \{M, I\} \} = \{M, O, I\} \cup \{ \{M, O, I\} \} = \emptyset.$$

Die Definition von ZR als verschachtelte „Relation über Relationen“ verlangt also automatisch ebenfalls  $\emptyset \subset S$ .

Erfüllt man also die Bedingungen 4.1. und 4.2. (die in der Stuttgarter Schule i.e.S. leider nicht einmal je erwähnt wurden), dann gilt: Die Semiotik ist eine Theorie im Sinne der Modelltheorie.

## **Bibliographie**

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Ebbinghaus, Heinz-Dieter et al., Einführung in die mathematische Logik. 4. Aufl. Heidelberg 1996

Schwabhäuser, Wolfram, Modelltheorie I. Mannheim 1970

Walther, Elisabeth, Ist die Semiotik überhaupt eine Wissenschaft? In: Semiosis 61/62, 1991, S. 5-13

## Die Peircesche Zeichenrelation und das Anti-Fundierungsaxiom

1. Ich habe bereits in Toth (2010) darauf hingewiesen, dass die von Bense (1979, S. 53) explizit folgendermassen definierte verschachtelte Zeichenrelation

$$ZR = \{M, \{\{M, O\}, \{M, O, I\}\}\},$$

d.h. als triadische Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation, in einer üblichen Mengenlehre wie dem Zermelo-Fränkelschen System wegen Selbstenthaltung zu Paradoxien führt. Da nach der obigen Definition von  $ZR \mid = \{M, O, I\}$ , sind ja nicht nur (n-1)-adische Relationen in n-adischen enthalten, sondern das Zeichen enthält sich selbst als Objekt, d.h. es gilt nach Aczél (1988, S. 6)

$$ZR = \{ZR\},$$

woraus natürlich folgt

$$ZR \cup \{ZR\} = \emptyset,$$

und damit ist die Peircesche Semiotik schachmatt gesetzt. (Das ist bislang tatsächlich niemandem aufgefallen!)

2. Fangen wir der Einfachheit halber mit dem ersten Teil von ZR an:

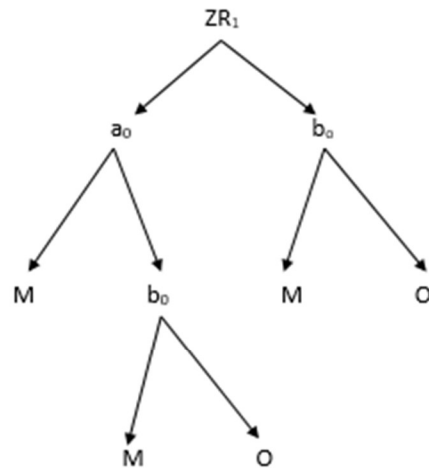
$$ZR_1 = \{M, \{M, O\}\},$$

hier liegt partielle Selbstenthaltung vor, die das Muster auch der zweiten Dyade ist, wo die Selbstenthaltung allerdings nicht M, sondern O betrifft. Mit AFA (Aczél 1988, S. 6 ff.) kann man diesen Fall wie folgt definieren:

$$ZR_1 = \{a_0, b_0\}, a_0 = \{M, b_0\}, b_0 = \{M, O\}.$$

Man erhält dann:

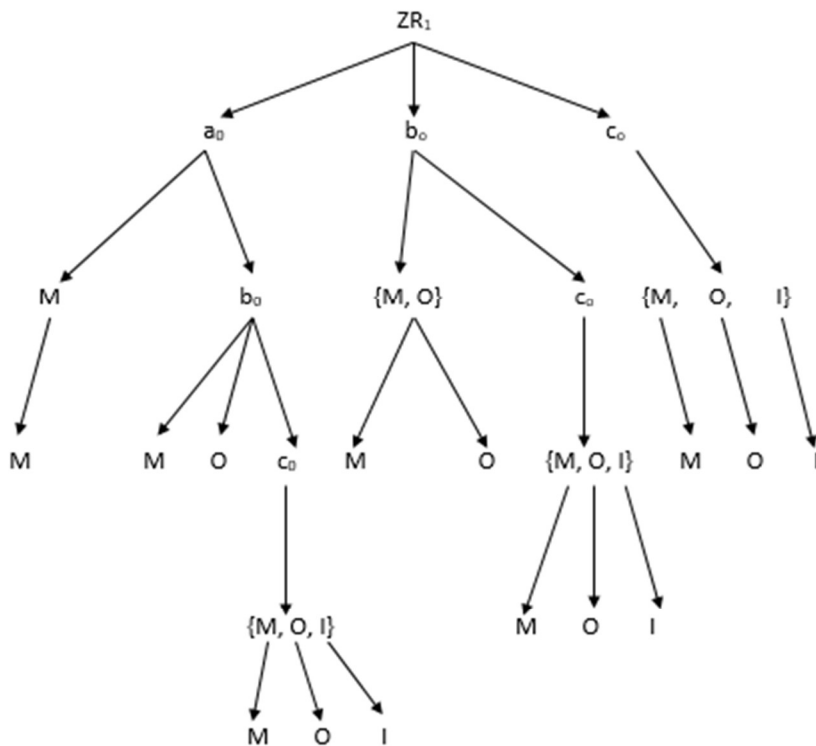




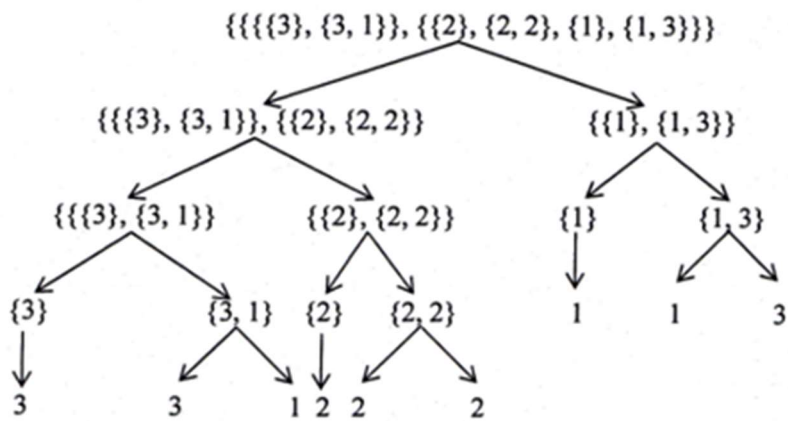
Um die ganze triadische Relation mit AFA darzustellen, kann man dann definieren:

$ZR = \{a_0, b_0, c_0\}$ ,  $a_0 = \{M, b_0\}$ ,  $b_0 = \{\{M, O\}, c_0\}$ ,  $c_0 = \{M, O, I\}$ .

Die Baumableitung von ZR sieht dann wie folgt aus:



Wie man Zeichenklassen und Realitätsthematiken ableiten kann, sei hier durch eine Abbildung gezeigt, die ich aus Toth (2006, S. 19) reproduziere:



Selbstreferentielle Semiotik setzt also die in diesem Aufsatz begründete neue semiotische Basistheorie unter Beibehaltung der verschachtelten Peirceschen Zeichendefinition voraus, allerdings muss in der zugehörigen Mengentheorie das Fundierungsaxiom durch das Aczelsche Anti-Fundierungsaxiom ersetzt werden.

### Bibliographie

Aczél, Peter, Non well founded sets. Cambridge 1988

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Die Selbstenthaltung des Zeichens. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

## Eine neue Betrachtung zu Peirce-Zahlen

1. Bekanntlich hatte Max Bense mehrfach versucht, die Isomorphie der Peano-Zahlen mit den sog. Primzeichen nachzuweisen (Bense 1975, S. 171 ff., 1983, S. 192 ff. [Peirce's eigener Versuch, die natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion einzuführen], schliesslich Bense 1980 [Primzahlen, Primzeichen]). Ich hatte schon früh kritisiert, dass dies falsch sein muss, denn wir haben allein in der kleinen Matrix drei verschiedene Peirce-Zahlen, nämlich triadische, trichotomische und diagonale:

$$\text{tdP} = ( (1., 2., 3.), < )$$

$$\text{ttP} = (.1, .2, .3), \leq$$

$$\text{dgP} = \text{tdP} \times \text{ttP} = \text{ttP} \times \text{tdP} = ((1.1, 2.2, 3.3, </>).$$

2. Nun lautet aber die Definition des Peirceschen Zeichens nach Bense (1979, S. 53):

$$\text{ZR} = (M, (M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I)),$$

d.h. ZR ist eine triadisch-verschachtelte Relation über einer monadischen, dyadischen und triadischen Relation und damit mengentheoretisch äquivalent mit

$$\text{ZR} = \{M, \{M, O\}, \{M, O, I\}\}$$

Nun ist aber

$$\text{ZR} = \{M, O, I\}$$

und damit gilt

$$\text{ZR} = \{\text{ZR}\} = \{\text{ZR}, \text{ZR}\}, \text{ usw.},$$

d.h. es kann keine Isomorphie bestehen zwischen den Peano-Zahlen

$$\mathbb{P} = ((1, 2, 3, \dots), <)$$

und den Peirce-Zahlen

$$\text{ZR} = \{1, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

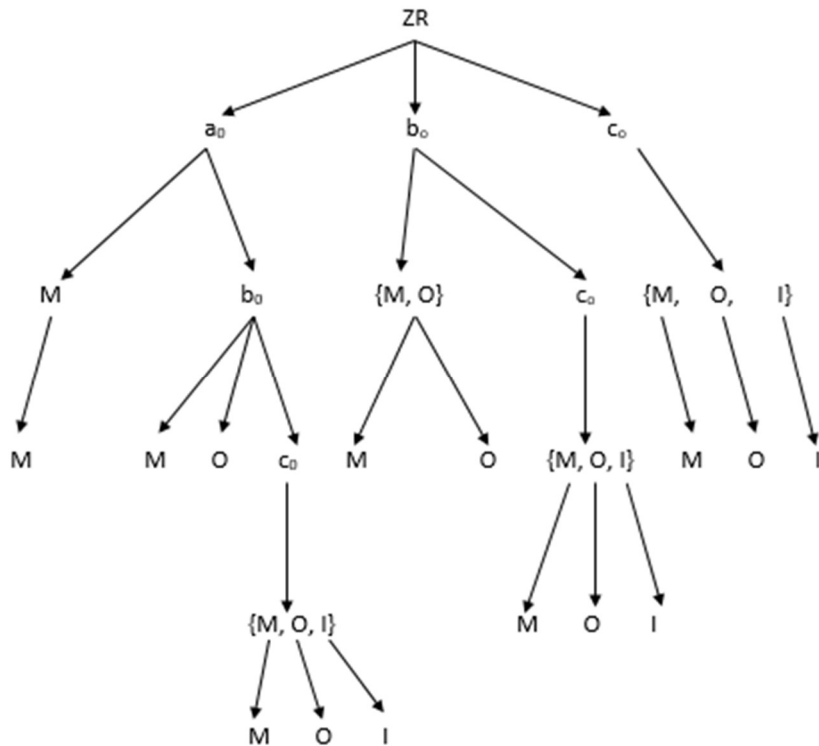
Weil ferner gilt

$$M = \{M\}, O = \{O\} \text{ sowie}$$

$$M \subset \{M, O\}, O \subset \{O, I\},$$

bekommen wir folgende Stammbaunableitung der Peirce-Zahlen:

$$\text{ZR} = \{a_0, b_0, c_0\}, a_0 = \{M, b_0\}, b_0 = \{\{M, O\}, c_0\}, c_0 = \{M, O, I\}:$$



Und die Zahlenfolge der Peirce-Zahlen lautet demgemäss:

112, 123, 12, 123, 123

Es werden also 14 Ziffern benötigt, um in einem Zahlensystem auf 3 zu zählen, in dessen mengentheoretischer Basis das Fundierungsaxiom durch das Anti-Fundierungsaxiom ersetzt ist (Toth 2010, Aczel 1988). Dabei sieht die Verteilung der Anzahl Ziffern auf die Fundmentalkategorien M, O und I wie folgt aus:

ZR3:  $M = 6, O = 5, I = 3$ .

Bei ZR2 hatten wir gefunden (Toth 2010):

ZR2:  $M = 3, O = 2, I = 0$ .

Wie man leicht zeigen kann, gilt allgemein

ZRn:  $FK1 = n, FK2 = (n-1), FK3 = (n-2), \dots, FK_n = 1$ ,

wobei  $FK 1 = M, FK 2 = O, FK 3 = I$ .

Dabei hat die Peirce-Zahlen-Folge für ZR2 die Länge 7 ( $= 3 + 4$ ), für ZR3 die Länge 14 ( $= 6 + 5 + 3$ ). Für ZR4 würden es dann 21 sein. Allgemein gilt damit, dass eine n-adische Zeichenrelation eine Länge von  $(n-1)$  mal 7 Ziffern besitzt.

## Bibliographie

Aczel, Peter, Non well founded sets. Cambridge 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

- Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden –Baden 1979
- Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: *Ars Semeiotica* 3/3, S. 287-294
- Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983
- Toth, Alfred, Die Peircesche Zeichenrelation und das Anti-Fundierungsaxiom. In:  
Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

## „In der Semiotik muss man nur auf 3 zählen können“ (Max Bense)

1. Das Titelzitat stammt aus Benses letzter wöchentlichlicher Vorlesung im Winter-Semester 1989/90 an der Universität Stuttgart und beeindruckte die beiden damals anwesenden Mathematiker, Günther Sigle und den Verfasser dieser Zeilen, einigermaßen.

2. Tatsächlich hatte Bense (1980) die Fundamentalkategorien als „Primzeichen“-Relation

$$PZR = (1, 2, 3)$$

einführt. Allerdings steht hier die 1 für 1R, die 2 für 2R und die 3 für 3R, so dass man also genauer schreiben sollte

$$PZR = 3R(1R, 2R, 3R),$$

zu lesen also: Die Primzeichen bilden eine triadische Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation. Denn tatsächlich hatte Bense ja kurz zuvor das Verhältnis von  $(1R, 2R, 3R)$  als „verschachtelte“ Relation wie folgt definiert (Bense 1979, S. 53):

$$ZR = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))).$$

Relational geschrieben ist das also

$$PZR = R(1R, ((1R \rightarrow 2R), (1R \rightarrow 2R \rightarrow 3R))),$$

wobei die grosse Frage auftaucht, welche Valenz das initiale R vor der Klammer hat. 6? Oder 14?

3. Direkt mit der Valenz der übergeordneten, umfassenden Relationen verschachtelter Relationen hängen nämlich verschiedene mögliche Zähl- bzw. Zahlensysteme zusammen. Wir können z.B. zeigen, dass Benses Primzeichen-Relation  $PZR = (1, 2, 3)$ , worin er die Relationen mit den ersten zwei Primzahlen sowie der 1 identifizierte (und später das Ordnungsprinzip analog dem Peanoschen Nachfolgeprinzip konstruieren wollte [Bense 1975, S. 171 ff., 1983, S. 192 ff.]) falsch ist, denn in der Semiotik wird einfach nicht 1, 2, 3 gezählt – obwohl es gewissermaßen richtig ist, zu sagen, in der Semiotik müsse man nur bis drei zählen können. Allerdings verlangt dieses Zählen bis zur 3 ein ganz anderes als normales Verständnis der mengentheoretischen Grundlagen der Semiotik.

Der Grund: Da

$$1R \subset 2R \subset 3R$$

gilt, gilt auch:

$M \subset \{M\}, O \subset \{O\}, I \subset \{I\}$

und damit

$ZR \subset \{ZR\}$

und wegen  $I = ZR$

$ZR = \{ZR\},$

was zu Aczels Zirkelparadoxie führt (Aczel 1988, S. 6), falls wir nicht das Fundierungsaxiom ausschalten und sog. Mirimanoff-Folgen zu lassen, also das, was das berühmte Bild auf den „La vache qui rit“-Streichkäselein oder Mani Matters Lied „Bim Coiffeur“ beinhaltet. Klassisch, d.h. mit Fundierungsaxiom, gilt nämlich

$ZR \cup \{ZR\} = \emptyset,$

und wegen  $ZR = \{ZR\}$  kämen wir dann nämlich zu

$ZR = \emptyset,$

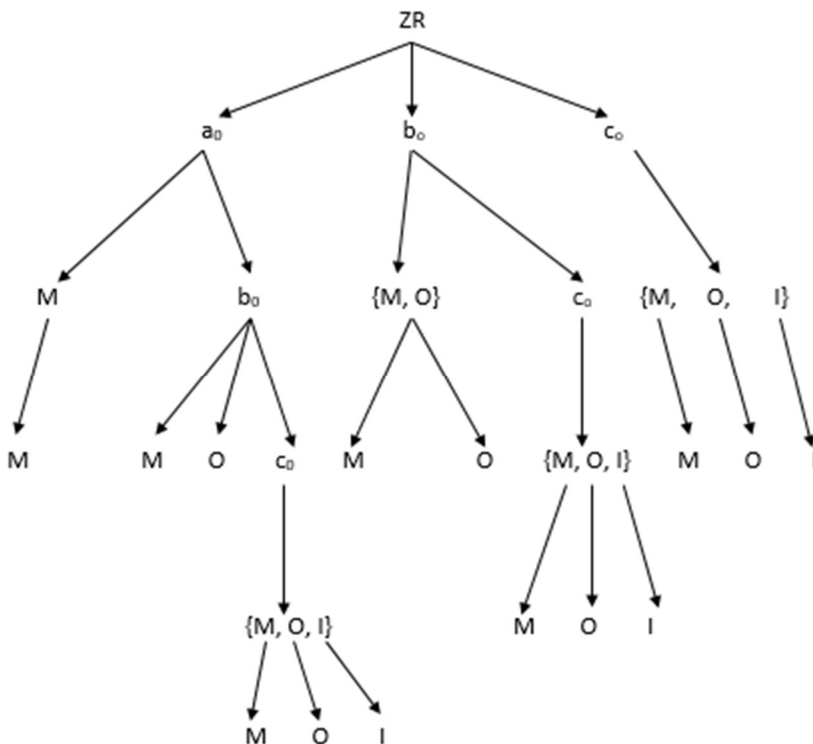
in Widerspruch zu PZR und ZR.

3. Während nämlich das Zählen bis 3 bei den Peano-Zahlen eine lineare Folge bildet:

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3,$

kann davon bei den verschachtelten Peirce-Zahlen, wie wir nun besser anstatt Primzeichen sagen, keine Rede sein:

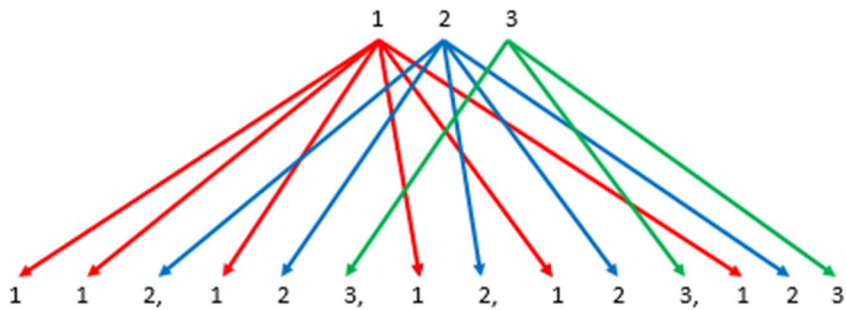
$ZR = \{a_0, b_0, c_0\}, a_0 = \{M, b_0\}, b_0 = \{\{M, O\}, c_0\}, c_0 = \{M, O, I\}:$



Und die Zahlenfolge der Peirce-Zahlen lautet demgemäss:

112, 123, 12, 123, 123

Es werden also 14 Ziffern benötigt, um in einem Zahlensystem auf 3 zu zählen, in dessen mengentheoretischer Basis das Fundierungsaxiom durch das Anti-Fundierungsaxiom ersetzt ist. Die komplexe Beziehung zwischen den Peano- und den Peirce-Zahlen kann man z.B. wie folgt andeuten:



## Bibliographie

Aczel, Peter, Non well founded sets. Cambridge 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden –Baden 1979

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica 3/3, 1980, S. 287-294

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983



## Weitere pathologische Zeichenrelationen mit AFA

1. In Toth (2010a, b) wurden einige Pathologien gezeigt, die immerhin semiotische Relevanz haben könnten. Bislang wurde jedoch daran festgehalten, dass nach Bense (1979, S. 53) die Zeichenrelation

$$ZR = \{M, \{M, O\}, \{M, O, I\}\}$$

eine dreifach verschachtelte Relation darstellt. Ersetzt man das Fundierungsaxiom der zugrunde liegenden Mengenlehre durch das Aczelsche Anti-Fundierungsaxiom (AFA), so enthält also ZR 3 mal M, 2 mal O und 1mal I. Da M eine monadische Relation ist, kann man ihm mit der von Bense/Walther eingeführten „Drittelsrechnung“ (vgl. Walther 1979, S. 108) den Wert

$$M = 1/3$$

zuordnen. Da O dyadisch ist, erhält es

$$O = 2/3,$$

und da I triadisch ist, bekommt es

$$I = 1/3.$$

Damit haben wir

$$ZR = (1/3M, 2/3O, 3/3I) = 6/3X,$$

also zweimal das Zeichen, das sich mit

$$I = \{M, O, I\}$$

ja selbst enthält, und das ist nichts anderes als die sich selbst enthaltende und dabei eindeutige Menge

$$\Omega = \{\Omega\} = \{\Omega, \Omega\},$$

die ja gerade durch AFA garantiert wird.

2. Hebt man nun jedoch die Verschachtelung auf – entsprechend der FA-Relation

$$ZR = \{M, O, I\} = \{\{M\}, \{O\}, \{I\}\}$$

mit dem „Repertoire“  $\{M\}$ , dem „Objektbereich“  $\{O\}$  und dem „Interpretantenfeld“  $\{I\}$  (vgl. Walther 1979, S. 56) -, so kommt man zu einem enormen Reichtum semiotischer Strukturen, der bisher noch ganz ununtersucht brachliegt.

Heben wir das Paar und das Tripel aus, so haben wir eine hexadische Relation

$$ZR_6 = \{M_1, M_2, M_3, O_1, O_2, I\}.$$

Kombiniert man alle Relata miteinander, erhält man bereits  $66 = 46'656$

Möglichkeiten. Schliesst man je 2 Relata zu Paaren zusammen, so dass sich also 5

Elemente kombinieren lassen, ergeben sich  $55 = 3'125$  Möglichkeiten, usw.

Zusammen ergibt also ein Total von  $66 + 55 + 44 + 33 + 22 + 1 = 50'069$

Möglichkeiten, von denen  $ZR = \{M1 \{M2, O1\}, \{M3, O2, I1\}\}$  nur gerade 1 Möglichkeit darstellt.

### **Bibliographie**

Toth, Alfred, Pathologische Mengeninklusionen mit AFA. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010a

Toth, Alfred, Pathologische Dyaden. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010b

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

## Selbstinklusionen bei Trichotomien

1. Da Zeichenrelationen selbstinklusiv sind

$ZR = \{M, \{M, O\}, (M, O, I)\}$  (Bense 1979, S. 37)

und also in normalen mengentheoretischen Systemen zur Russellschen Paradoxie führen, kann man sie unter Berücksichtigung des Anti-Fundierungsdaxioms „retten“ und daher Zirkularität in der Semiotik ermöglichen, welche z.B. für die Autoreproduktion der Zeichen benötigt wird.

2. Allerdings zeigt die obige Relation nur die Selbstinklusion der Triaden, nicht aber der Trichotomien. Letztere sind bekanntlich nur bei der kategorienrealen Relation, der Hauptdiagonalen der semiotischen Matrix,

$(3.3 \ 2.2 \ 1.1) \times (1.1 \ 2.2 \ 3.3.)$ ,

identisch, nicht aber bei den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

3.1 2.1 1.1  $1 \subset 1 \subset 1 := \{M \ \{M \ \{M\}\}\}$

3.1 2.1 1.2  $2 \supset 1 \subset 1 := \{(M \ O), M\}$

3.1 2.1 1.3  $3 \supset 1 \subset 1 := \{\{I, M\}, M\}$

3.1 2.2 1.2  $2 \subset 2 \supset 1 := \{\{O, \{O\}\}, M\}$

3.1 2.2 1.3  $3 \supset 2 \supset 1 := \{(I, O), M\}$

3.1 2.3 1.3  $3 \subset 3 \supset 1 := \{\{I, \{I\}\}, M\}$

3.2 2.2 1.2  $2 \subset 2 \subset 2 := \{M \ \{M \ \{M\}\}\}$

3.2 2.2 1.3  $3 \supset 2 \subset 2 := \{\{I, O\}, O\}$

3.2 2.3 1.3  $3 \subset 3 \supset 2 := \{\{I, \{I\}\}, O\}$

3.3 2.3 1.3  $3 \subset 3 \subset 3 := \{I \ \{I \ \{I\}\}\}$

und ebenfalls nicht bei den weiteren 17, den sog. „irregulären“ Zeichenklassen oder Zeichenrelationen:

3.1 2.2 1.1  $1 \subset 2 \supset 1 := \{\{M, \{O\}\}, M\}$

3.1 2.3 1.1  $1 \subset 3 \supset 1 := \{\{M, \{I\}\}, M\}$

3.1 2.3 1.2  $2 \subset 3 \supset 1 := \{\{O, \{I\}\}, M\}$

3.2 2.1 1.1  $1 \subset 1 \subset 2 := \{M \ \{M \ \{O\}\}\}$

3.2 2.1 1.2  $2 \supset 1 \subset 2 := \{\{O, M\}, O\}$

|             |                         |                          |
|-------------|-------------------------|--------------------------|
| 3.2 2.1 1.3 | $3 \supset 1 \subset 2$ | $:= \{\{I, M\}, O\}$     |
| 3.2 2.2 1.1 | $1 \subset 2 \subset 2$ | $:= \{M \{O \{O\}\}\}$   |
| 3.2 2.3 1.1 | $1 \subset 3 \supset 2$ | $:= \{\{M, \{I\}\}, O\}$ |
| 3.2 2.3 1.2 | $2 \subset 3 \supset 2$ | $:= \{\{O, \{I\}\}, O\}$ |
| 3.3 2.1 1.1 | $1 \subset 1 \subset 3$ | $:= \{M \{M \{I\}\}\}$   |
| 3.3 2.1 1.2 | $2 \supset 1 \subset 3$ | $:= \{\{O, M\}, I\}$     |
| 3.3 2.1 1.3 | $3 \supset 1 \subset 3$ | $:= \{\{I, M\}, I\}$     |
| 3.3 2.2 1.1 | $1 \subset 2 \subset 3$ | $:= \{M \{O \{I\}\}\}$   |
| 3.3 2.2 1.2 | $2 \subset 2 \subset 3$ | $:= \{O \{O \{I\}\}\}$   |
| 3.3 2.2 1.3 | $3 \supset 2 \subset 3$ | $:= \{\{I, O\}, I\}$     |
| 3.3 2.3 1.1 | $1 \subset 3 \subset 3$ | $:= \{M \{I \{I\}\}\}$   |
| 3.3 2.3 1.2 | $2 \subset 3 \subset 3$ | $:= \{O \{I \{I\}\}\}$   |

## **Bibliographie**

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

## Eine neue semiotische Matrix mit AFA

1. Ein bedeutendes Problem stellt in der Peirceschen Semiotik die Matrix mit ihren gebrochenen Kategorien dar. Es ist ohne Gleichen in der Geschichte der analytischen Philosophie, dass z.B. ein Gegenstand mit „zwei Teilen Wirklichkeit plus einem Teil Möglichkeit“ kategorisiert wird – wie dies bei einem „Icon“ oder Abbild der Fall ist. Zudem sind die Kategorisierungen durch gebrochene Kategorien in der Regel nicht einleuchtend: So wird etwa das „Symbol“ durch „zwei Teile Wirklichkeit und einen Teil Notwendigkeit“ charakterisiert. Aber würde man rein intuitiv nicht gerade beim Icon, z.B. einer Photographie, 2 Teile Wirklichkeit und 1 Teil Notwendigkeit oder sogar 2 Teile Notwendigkeit plus einen Teil Wirklichkeit erwarten? Die Widergabe von Wirklichkeit ist doch gerade der Sinn der Photographie, während das Symbol sich ja gerade völlig von der Wirklichkeit befreien möchte, wie man dies wohl am extremsten bei den Dadaisten beobachten kann. Auch das Verhältnis der zueinander konversen gebrochenen Kategorien ist nicht einleuchtend: Warum sollte die Konverse einer Quantität (1.2) gerade ein Icon (2.1), also ein Abbild sein, das doch viel eher qualitäts- anstatt quantitätsdeterminiert ist? Warum ist die Konverse eines Symbols (3.2) ein Rhema (3.2), d.h. ein logischer, entscheidbarer Satz und nicht ebenfalls ein Wort?

2. Ein weiteres, nicht weniger gravierendes Pronem sind die Valenzverhältnisse der gebrochenen Kaegorien. So kann zwar ein Icon (2.1) als primäre Zweitheit eine sekundäre Erstheit binden, aber das Umgekehrte (1.2) dürfte nicht der Fall sein, denn dass eine monadische Relation, wie z.B. „X ist krank“, zwei Ausdrücke aufnimmt, ist ganz ausgeschlossen. Eine dyadische Prädikatsform wie „X schlägt Y“ ist ferner nur dann gesättigt, wenn sowohl für X als auch für Y Ausdrücke eingesetzt werden – das wäre dann aber im dyadischen Fall nur bei (2.2), nicht beim untersättigten (2.1) und beim übersättigten (2.3) der Fall. Von den Valenzen her scheiden somit alle gebochenen Kategorien der Form (a.b) mit  $a \neq b$  aus, denn sie sind im Falle von  $b < a$  untersättigt und im Falle von  $b > a$  übersättigt. Damit bleiben also vom valenztheoretischen Standpunkt aus nur noch die genuinen Relationen der Form (a.a) – und damit die ganzen, nicht-gebrochenen Kategorien übrig.

3. Ersetzt man jedoch die FA-Definition des Zeichens

$$ZR = (M, O, I)$$

durch die AFA-Definition (vgl. z.B. Toth 2010)

$$ZR^* = \{M, \{M, O\}, \{M, O, I\}\},$$

dann kann man nun statt der nicht-selbstenthaltenden die selbstenthaltenden Mengen  $M$ ,  $\{M, O\}$  und  $\{M, O, I\}$  als Primzeichen setzen. Man beachte, dass dabei die Primzeichen 1-, 2- und 3-stellig bzw. monadisch, dyadisch und triadisch bleiben, dass ihre Stelligkeit in dieser Schreibung aber lediglich explizit sichtbar wird:

|               | M              | $\{M, O\}$            | $\{M, O, I\}$            |
|---------------|----------------|-----------------------|--------------------------|
| M             | MM             | $M\{M, O\}$           | $M\{M, O, I\}$           |
| $\{M, O\}$    | $\{M, O\}M$    | $\{M, O\}\{M, O\}$    | $\{M, O\}\{M, O, I\}$    |
| $\{M, O, I\}$ | $\{M, O, I\}M$ | $\{M, O, I\}\{M, O\}$ | $\{M, O, I\}\{M, O, I\}$ |

Die Bildung von AFA-Zeichenklassen funktioniert dann wie folgt:

$$Zkl = \{\{M, O, I\}.a, \{M, O\}.b, M.c\}$$

mit  $a, b, c \in \{M, \{M, O\}, \{M, O, I\}\}$  und  $a \leq b \leq c$  (denn hier gilt natürlich  $\{M, O, I\} \not\subset \{M, O\} \not\subset M$ ).

### Bibliographie

Toth, Alfred, Die Peircesche Zeichenrelation und das Anti-Fundierungsaxiom. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

## Multivarianz, AFA und Erfüllung

1. Will man die rekursive Definition der Zeichenklasse

$$\text{ZRR} = \{M, \{\{M, O\}, \{M, O, I\}\},$$

in der das mengentheoretische Fundierungsaxiom durch das Anti-Fundierungs-Axiom Aczél's (1988) ersetzt ist (wodurch Mirimanoff-Folgen zugelassen werden und die Menge, die sich selbst enthält, nicht-paradoxal sowie eindeutig bestimmt ist) mit der von Toth (2010) eingeführten multivarianten Definition der Zeichenklasse

$$\text{ZRM} = \{\{Mi\}, \{Oi\}, \{Ii\}\}$$

verbinden, in der anstatt von Mittel-, Objekt- und Interpretantenbezug vom Mittel-Repertoire, Objektbereich und Interpretantenfeld ausgegangen wird (vgl. Walther 1979, S. 56) zusammenbringen, so kommt man auf die folgende Zeichendefinition mit irreduzibler Klammerung

$$\text{ZRM} = \{\{Mi\}, \{\{\{Mi\}, \{Oi\}\}, \{\{Mi\}, \{Oi\}, \{Ii\}\}\}.$$

2. Damit ist es möglich, zu entscheiden, ob ein zeichenartiges Gebilde in Bezug auf M, O oder I ein Zeichen ist, und zwar über die folgenden modelltheoretischen Erfüllbarkeitsrelationen:

$$\{Mi\} \models \phi \text{ gdw Erf } \{Mi\} \phi$$

$$\{Oi\} \models \chi \text{ gdw Erf } \{Oi\} \chi$$

$$\{Ii\} \models \psi \text{ gdw Erf } \{Ii\} \psi$$

### Bibliographie

Aczél, Peter, Non-well founded Sets. Cambridge 1988

Toth, Alfred, Multivariante Semiotik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

## Objektfamilien und Zeichenklassen

1. Ein Behältnis ist nicht einfach ein Objekt  $\Omega$ , sondern z.B. ein Glas  $\Omega_1$ , ein Becher  $\Omega_2$ , ein Humpen  $\Omega_3$ , ein Kelch  $\Omega_4$ , eine Tasse  $\Omega_5$ , eine Bowle  $\Omega_6$ , eine Schale (Kaffee)  $\Omega_7$ , beim Bier ein Pfiff/ein Hergöttli (1dl)  $\Omega_8$ , ein Tschumpeli (2dl)  $\Omega_9$ , eine Stange/Tulpe (3dl, je nachdem, ob der Fuss mit dem Trinkglas durch eine Stange verbunden ist oder direkt mit dem Fuss verschweisst ist), ein Rugeli (4dl)  $\Omega_{10}$ , ein Grosses/eine Halbe (5dl)  $\Omega_{11}$ , eine Mass (1l)  $\Omega_{12}$ , eine Susi (5/10/mehr Liter)  $\Omega_{13}$ , usw. Objekte zerfallen also nach unserer Wahrnehmung in Klassen, und zwar bevor wir sie zu Zeichen erklären, nach der Benseschen „Werkzeugrelation“ (1981, S. 33): (Mittel, Gegenstand, Gebrauch). Der Mittelbezug der WKZ umfasst also das Qualitative, z.B. ob ein Gefäss aus Holz, Glas, Stein, Metall etc. ist, der Gegenstand das Quantitative (die obige Klassifikation Schweizer Biergläser), und der Gebrauch den Zweck: z.B. bezeichnet „Kiesel“ oder „pebble“ keinen Stein, den man als Wurfgeschoss verwenden kann, während man mit „Felsblock“ oder „boulder“ keinen Stein meint, den man zur Fügung einer Mauer verwenden würde.

2. Rein formal haben wir also folgende Situation: die Wahrnehmung gliedert Objekte in Objektfamilien

$$\mathfrak{I}(\Omega) = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n\}.$$

Daraus entstehen interpretierte Objekte (denen später Namen, d.h. sprachliche Zeichen zugeordnet werden, s.o.):

$$\mathfrak{I}\Omega_1, \mathfrak{I}\Omega_2, \mathfrak{I}\Omega_3, \dots, \mathfrak{I}\Omega_n.$$

Werden sie bezeichnet, benötigt man dazu ein Mittel. Da diese notwendig aus der Welt der Objekte stammt (sofern man sich auf 1 Ontologie beschränkt), gilt für jedes Mittel  $m_i$ :

$$m_i \subset \{\Omega_n\}.$$

Aber natürlich gilt nur im Falle der natürlichen Zeichen

$$m_i \subset \Omega_i,$$

wo also das Mittel ein realer Teil seines zugehörigen (realen) Objektes ist. Es gilt somit  $(\mathfrak{I}\Omega_1 m_i), (\mathfrak{I}\Omega_2 m_j), (\mathfrak{I}\Omega_3 m_k), \dots, (\mathfrak{I}\Omega_n m_m) = \mathfrak{I}(\Omega_n m_m)$ .

Damit können wir kürzer definieren

$$\text{OKL} = \{m \subset \{\Omega\}, \Omega, \mathfrak{I}\},$$



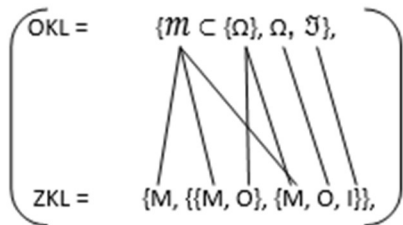
indem wir auf die Indizes verzichten.

3. Eine Zeichenklasse wird nach Bense (1979, S. 53) wie folgt definiert

$$\text{ZKL} = \{M, \{\{M, O\}, \{M, O, I\}\},$$

was AFA anstatt FA verlangt (Toth 2010).

Damit bekommen wir das folgende Transformationsschema der komplexen Beziehungen zwischen Objektfamilien und Zeichenklassen:



## Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Toth, Alfred, Zeichenklassen mit Anti-Fundierungs-Axiom. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

## Treppe, Eskalator, Lift. Drei mengentheoretische und semiotische Modelle mit Anti-Fundierungs-Axiom

1. Das Zeichen wurde von Bense wie folgt eingeführt: „Für die Konstituierung der vollständigen triadischen Relation über Relationen ergibt sich

$$ZR(M, O, I) =$$

$$ZR(M, M \rightarrow O, M \rightarrow O \rightarrow I) =$$

$$ZR(\text{mon. Rel.}, \text{dyad. Rel.}, \text{triad. Rel.}) =$$

$$ZR(.1., .2., .3.) =$$

$$\begin{array}{ccc} ZR & 1.1 & 1.2 & 1.3, & 1.1 & 1.2 & 1.3, & 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ & & & & 2.1 & 2.2 & 2.3 & 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ & & & & & & & 3.1 & 3.2, & 3.3 \end{array}$$

Mit dieser Notation wird endgültig deutlich, dass Repräsentation auf Semiotizität und Semiotizität auf Gradation der Relationalität beruht (1979, S. 67).

Was Bense vergass, ist, dass mit dieser Notation der selbstreferentielle Charakter der Semiotik deutlich wird, der in einer Mengentheorie mit Fundierungsaxiom zirkulär ist und zum Russellschen Paradox führt:

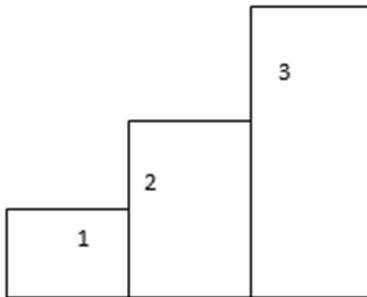
$$A = \{A\}.$$

Diese Gleichung besagt innerhalb der Peirceschen Semiotik in Sonderheit, dass sich das Zeichen selbst enthält, und zwar als triadischer Interpretantenbezug. Wie man sofort sieht, ist M 3x, O 2x und I 1x vertreten. Das Zeichen enthält sich damit selbst sowie einen Mittel- und zwei Objektbezüge.

Wir wollen dieses mengentheoretische Modell als Treppe bezeichnen, wobei wir uns bewusst sind, dass wir hier eine altertümliche, herrschachtliche Treppe mit „ausgefülltem“ Treppenkasten im Auge haben:



Die formale Struktur ist hier also:



mit

$$1 \subset \{2, 3\}$$

$$2 \subset \{3\}$$

Wenn wir die Nullheit dazunehmen (vgl. Stiebing 1981), hätten wir noch

$$0 \subset \{1, 2, 3\},$$

d.h. die allgemeine mengentheoretische Struktur lautet

$$A_1 = \{n \subset (n+1) \subset (n+2) \subset (n+3) \subset \dots \subset (n+m)\},$$

$$A_2 = \{(n+1) \subset (n+2) \subset (n+3) \subset \dots \subset (n+m-1)\},$$

$$A_3 = \{(n+2) \subset (n+3) \subset (n+4) \subset \dots \subset (n+m-2)\},$$

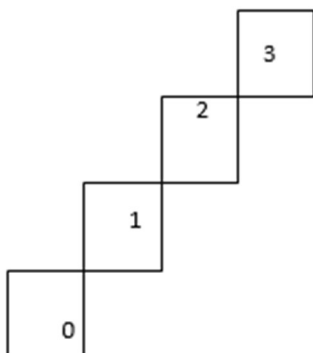
...

$$A_n = \{(n+m) \subset (n+m+1)\}.$$

2. Ein weitere Möglichkeit, Relationen von Relationen zu bilden, kann in Form eines Lift-Modells geschehen:



Hier gibt es also keinen „ausgefüllten Treppenkasten“ und daher beschränkte Selbstinklusion. Das allgemeine Modell sieht wie folgt aus:



mit

$$0 \subset 1 \subset 2 \subset 3,$$

allgemein also

Das entsprechende mengentheoretische Zeichenmodell sieht dann wie folgt aus:

$$ZR = ((M, (M \rightarrow O), (O \rightarrow I))$$

Das Zeichen selbst enthält sich hier also nicht selbst, wohl aber die Fundamentalkategorien, d.h. seine Teilmengen, und zwar gilt

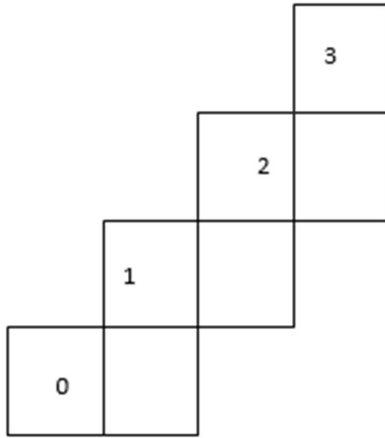
$$M \subset (M \rightarrow O)$$

$$M \subset (O \rightarrow I).$$

3. Allerdings gibt es noch eine dritte Möglichkeit mengentheoretischer Inklusion, und zwar eine zwischen dem Treppen- und dem Liftmodell vermittelnde, die man als Exkalator- oder Schrägliftmodell (Rolltreppenmodell) bezeichnen könnte:



Das allgemeine Modell sieht hier also wie folgt aus:



Es gilt hier also:

$$0 \subset \{1, 2, 3\}$$

$$0, 1 \subset \{2, 3\}$$

$$0, 1, 2 \subset \{3\},$$

d.h. allgemein

$$n \subset \{(n+1), (n+2), (n+3), \dots, (n+m)\}$$

$$n, (n+1) \subset \{(n+2), (n+3), \dots, (n+m)\}$$

$$n, (n+1), (n+2) \subset \{(n+3), \dots, (n+m)\}$$

...

$$n, (n+1), (n+2), \dots, (n+m-1) \subset \{(n+m)\}$$

Für die entsprechende triadische Zeichenrelation gilt hier somit

$$M \subset \{O, I\}$$

$$M, O \subset \{I\},$$

d.h. es liegt ebenfalls keine Selbstenthaltung des Zeichens vor, sondern die komplementären Mengen sind in den Mengen enthalten, d.h.  $M$  in  $\{O, I\}$  und  $\{M, O\}$  in  $\{I\}$ .

## Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Stiebing, Hans Michael, Die Semiose von der Natur zur Kunst. In: Semiosis 23, 1981

# Komplementäre Zeichen und Mengen

1. In Toth (2010) wurde gezeigt, dass man gestufte Relationen über Relationen, die mengentheoretisch ein Anti-Fundierungsaxiom benötigen (vgl. Aczel 1988) auf mindestens drei Arten definieren kann:

1.1. Benses „Treppen“-Definition. Bense spricht auch von „Verschachtelung“ (1979, S. 53):

ZR(1., .2., .3.) =

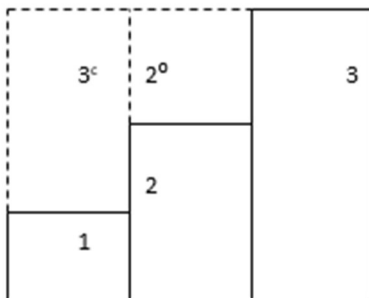
|                 |              |             |
|-----------------|--------------|-------------|
| ZR 1.1 1.2 1.3, | 1.1 1.2 1.3, | 1.1 1.2 1.3 |
|                 | 2.1 2.2 2.3  | 2.1 2.2 2.3 |
|                 |              | 3.1 3.2 3.3 |

Kürzen wir die Zeichenklassen von links nach rechts und von oben nach unten durch grosse lateinische Buchstaben ab, so haben wir

ZR = (A, ((A, B), (A, B, C)))

A ist also in der Teilmenge (A, B) von A sowie in der Teilmenge (A, B, C) von A, die auch (A, B) enthält, enthalten, und (A, B) ist ausserdem Teilmenge der Teilmenge (A, B, C). Da aber ZR = A, B, C, enthält ZR nicht nur sämtliche Teilmengen, sondern auch sich selbst, d.h.  $A = \{A\}$ , und man benötigt zur Vermeidung des Russellschen Paradoxes das Aczelsche Anti-Fundierungsaxiom, das selbstreferentielle Strukturen wie Mirmanoff-Sequenzen usw. erlaubt.

Das allgemeine Modell sieht wie folgt aus:



1.2. Das „Aufzugs-Modell“:

Das entsprechende mengentheoretische Zeichenmodell sieht dann wie folgt aus:

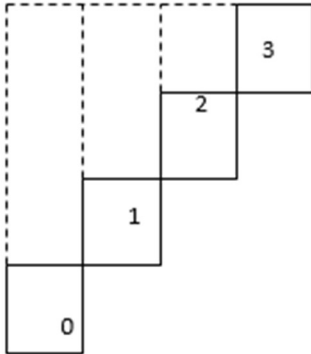
ZR = ((M, (M → O), (O → I))

Das Zeichen selbst enthält sich hier also nicht selbst, wohl aber die Fundamentalkategorien, d.h. seine Teilmengen, und zwar gilt

$$M \subset (M \rightarrow O)$$

$$M \subset (O \rightarrow I).$$

Das allgemeine Modell sieht wie folgt aus:



mit

$$0 \subset 1 \subset 2 \subset 3 \quad \text{und} \quad O \subset = O^0 + 1^0 + 2^0 + 3^0$$

1.3. Das „Eskalator“-Modell:

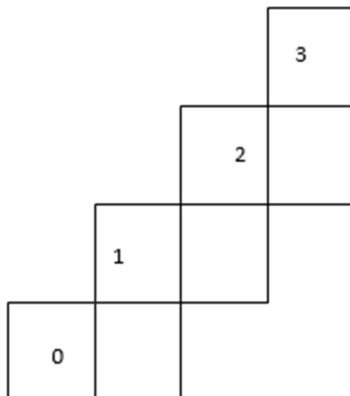
Für die entsprechende triadische Zeichenrelation gilt hier somit

$$M \subset \{O, I\}$$

$$M, O \subset \{I\},$$

d.h. es liegt ebenfalls keine Selbstenthaltung des Zeichens vor, sondern die komplementären Mengen sind in den Mengen enthalten, d.h.  $M$  in  $\{O, I\}$  und  $\{M, O\}$  in  $\{I\}$ .

Das allgemeine Modell sieht hier also wie folgt aus:



Es gilt hier:

$$0 \subset \{1, 2, 3\} \quad 0^0 \subset 1 \quad 0^0 = 0c$$

$$0, 1 \subset \{2, 3\} \quad 1^0 \subset 2 \quad 1^0 = 1c$$

$$0, 1, 2 \subset \{3\} \quad 2^0 \subset 3 \quad 2^0 = 0c$$

$$3^0 = 3c$$

und das heisst

$$0^0 + 0 = 0$$

$$1^0 + 1 + 1 c = 1$$

$$2^0 + 2 + 2 c = 2$$

$$3 c + 3 = 3$$

## **Bibliographie**

Aczel, Peter, The Anti Foundaton Axiome. Cambridge 1988

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Treppe, Eskalator, Lift. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

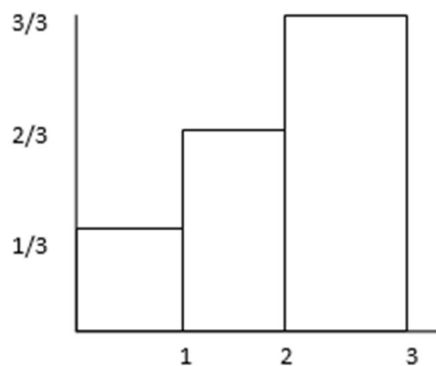


## Zeichenrelationstrukturen und Komplemente

1. Wir führen folgende Neuerung in die Theoretische Semiotik ein: Zur Darstellung von Relationen, Mengen usw. benützen wir ein Koordinatensystem, auf deren Abszisse wir die Primzeichen und auf deren Ordinate wir die Inklusionen eintragen. Die von Bense (1979, S. 53) definierte Peirce Zeichenrelation

$$ZR = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I)))$$

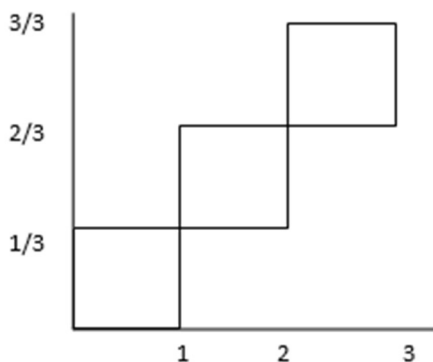
kann dann wie folgt dargestellt werden:



2. Dies war das in Toth (2010) so genannten „Treppenmodell“. Will man ZR in Form des Aufzugs-Modells darstellen, so bekommt man die Zeichenrelation

$$ZR = ((M, (M \rightarrow O), (O \rightarrow I)))$$

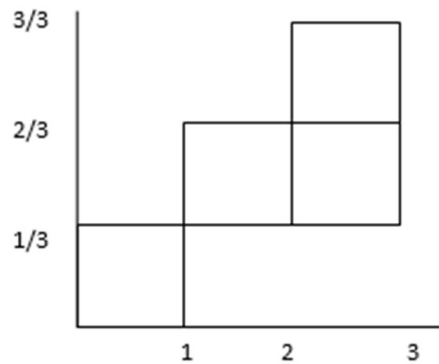
und als zugehöriges Modell:



3. Als drittes Modell wurde ebenfalls in Toth (2010) das sog. Eskalator-Modell vorgeschlagen, das eine Art Kompromiss (Vermittlung) der beiden obigen Modelle darstellt und auf der Zeichenrelation

$$ZR = (M, ((M \rightarrow O), (O \rightarrow I), (O \rightarrow I)))$$

definiert ist:



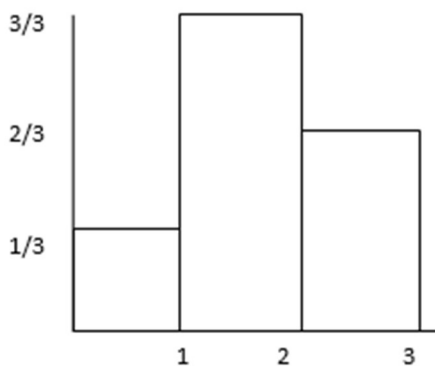
4. Neben diesen drei „regulären“ Zeicheinklusionsmodellen kann man jedoch noch eine sehr grosse Anzahl „irregulärer“ konstruieren. In einer 1. Gruppe muss lösen wir dadurch die Ordnungsrelation der Primzeichen

$$PZ = 1 > 2 > 3$$

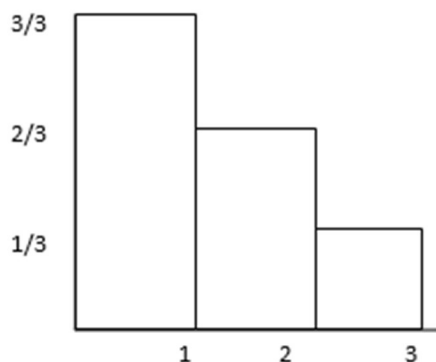
auf.

Da wir eine triadische Relation vor uns haben, bekommen wir dadurch  $3! = 6$  permutationale Ordnungen, darunter die folgenden 5 neuen:

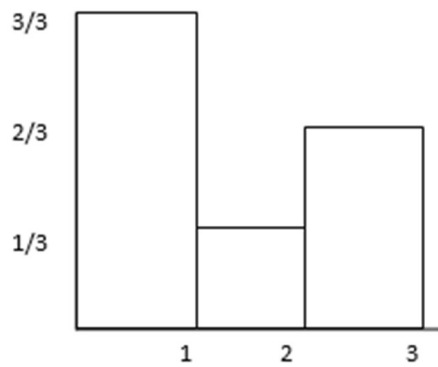
4.1. ZR = (M, I, O)



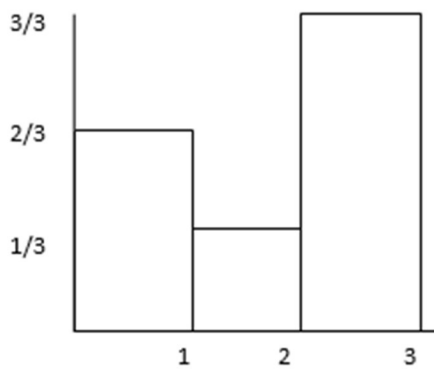
4.2. ZR = (I, O, M)



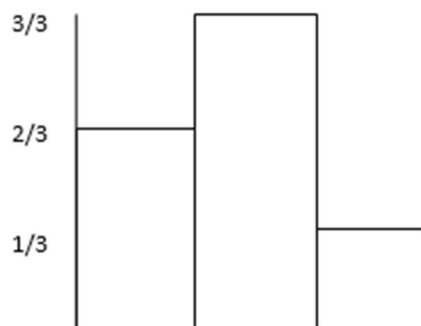
4.3. ZR = (I, M, O)



4.4. ZR = (O, M, I)



4.5. ZR = (O, I, M)

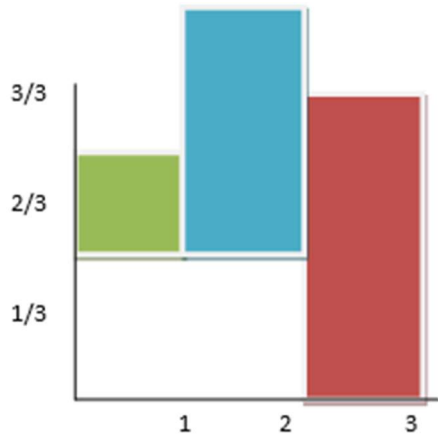


5. In einer 2. Gruppe lösen wir die Inklusionordnung

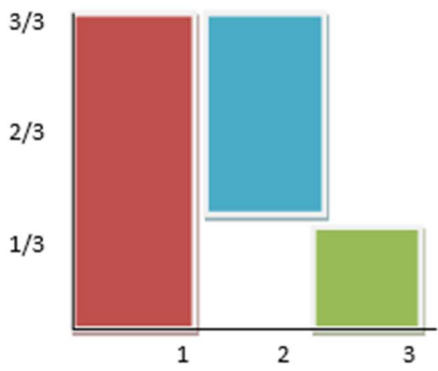
ZR = .1.  $\subset$  .2.  $\subset$  .3.

auf. Damit sind wir bei den „pathologischen“ Relationen angelangt, insofern hier z.B.  $3 < 1$  gelten kann, also im Grunde Erscheinungen, die sonst nur in polykontexturalen Systemen aufscheinen. Unter den zahlreichen Möglichkeiten vgl. z.B.

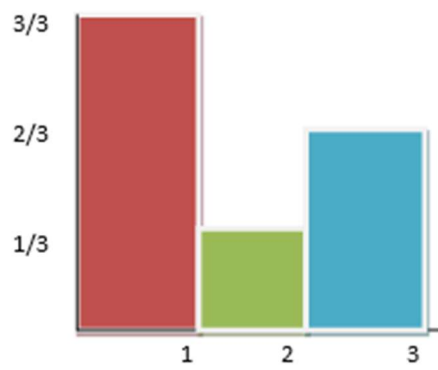
5.1. ZR = (M, I, O)



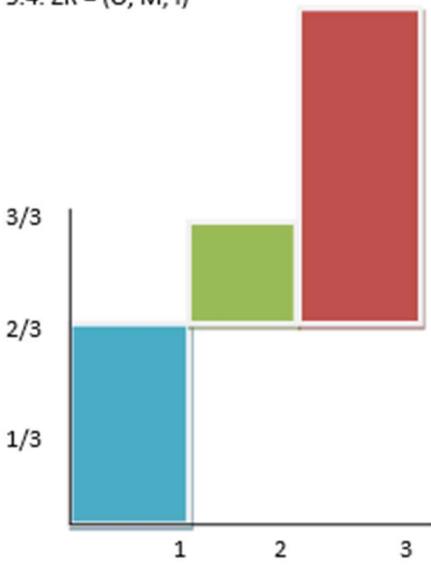
5.2. ZR = (I, O, M)



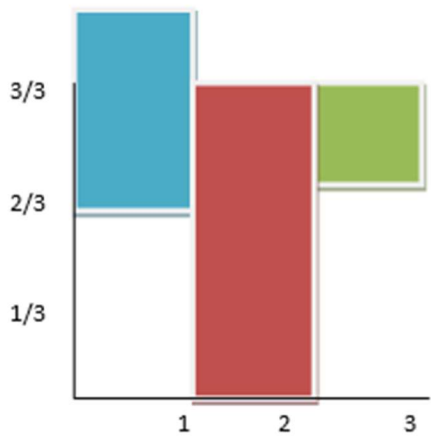
5.3. ZR = (I, M, O)



5.4. ZR = (O, M, I)

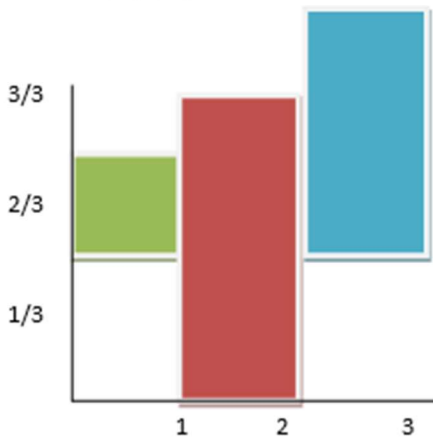


5.5. ZR = (O, I, M)

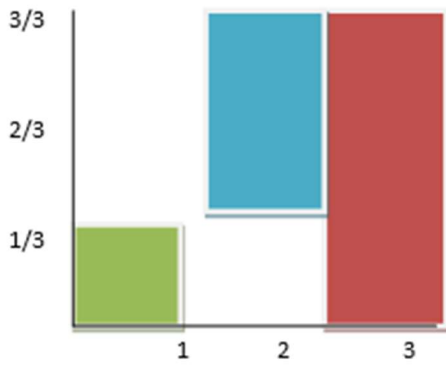


6. Kombiniert nun beide Aufhebungen miteinander, d.h. löst man zugleich die Ordnung der PZO = (1 > 2 > 3) und diejenige der Inklusionen IO = (.1. ⊂ .2. ⊂ .3.) auf, so gibt es natürlich für alle in 5 ausschnittsweise behandelten Typen nochmals 6 Permutationen, also etwa die folgenden:

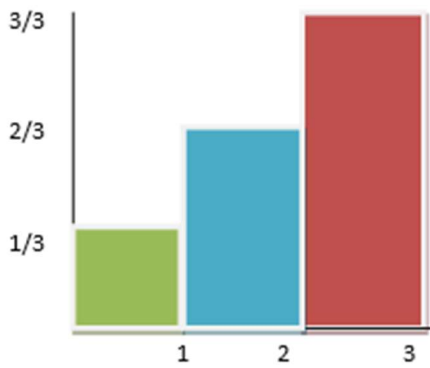
6.1. ZR = (M, I, O)



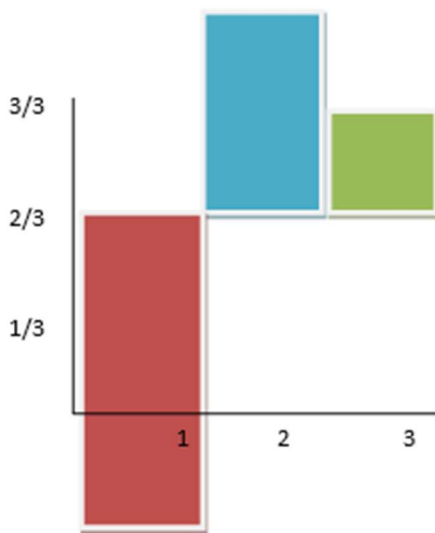
6.2. ZR = (I, O, M)



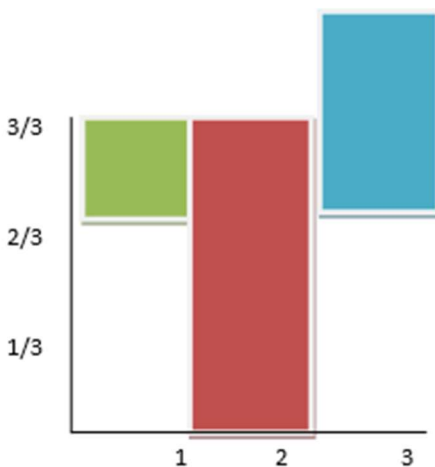
6.3. ZR = (I, M, O)



6.4. ZR = (O, M, I)



6.5. ZR = (O, I, M)



7. Alle in 4.-6. präsentierten Typen mit aufgehobener Primzeichen- oder/und Inklusionsordnung beruhen auf dem in 1. dargestellten Zeichenmodell Typ 1. Selbstverständlich kann man alles natürlich auch noch anwenden auf die unter 2. und 3. dargestellten Zeichenmodelle Typ 2 und 3, d.h. nicht nur auf das Treppenmodell, sondern auch auf die Lift- und Eskalatormodelle. Zusammenfassend ergibt sich eine sehr grosse Anzahl völlig neuer semotischer Modelle, die von der Peirceschen Basistheorie nicht zugänglich und natürlich im Hinblick auf ihre Applikation hinzuprüfen sind.

## **Bibliographie**

- Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979
- Toth, Alfred, Treppe, Eskalator, Lift. Drei mengentheoretische und semiotische Modelle mit Anti-Fundierungsaxiom. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010



## Neues zu einer semiotischen Grammatiktheorie

1. In einem seiner (meistens zu Unrecht) viel-belächelten 17 Bücher formulierte der leider zu früh verewigte Erlanger Linguist August Dausen, die Sprach- und Grammatiktheorie leide an der Grundkrankheit, pleonastisch zu sein (Dausen 1994). Denjenigen, der von der Mathematik herkommt, erstaunt eine solche Feststellung eigentlich nicht sonderlich (wie sie die Linguisten erschreckt hat, die sie als Unsinn abgetan haben), sondern er fragt sich, wieso es bis 1994 gedauert hat, bis der Missstand, dass Sprache durch Sprache beschrieben wird, erst entdeckt worden war. In der Logik und der Mathematik hat bekanntlich die Russellsche Entdeckung der bekannten Paradoxie in Freges Arithmetik zu einem Jahrzehnte andauernden Grundlagenstreit und zur Aufteilung der Mathematik in verschiedene „Richtungen“ (z.B. Formalismus vs. Intuitionismus) geführt. Aber nichts dergleichen ist in der Linguistik geschehen. Selbst in Chomskys generativer Grammatik wird Sprache mit Sprache beschrieben, auch wenn die Transformations- und weiteren Regeln teilweise die Gestalt „mathematischer“ Gesetze anzunehmen scheinen. Im Gegenteil wurde der v.a. in den 60er Jahren auch auf deutschen Sprachgebiet im Vormarsch befindlichen Mathematischen Linguistik der Vorwurf gemacht, es werde hier eine dem Gegenstand (d.h. der Sprache) fremde Methode (d.h. die Mathematik) gewissermassen überworfene bis über sie übergestülpt.

2. Wie soll man also Sprache beschreiben, ohne sich der logischen Zirkularität schuldig zu machen und wertlose Rekursionen zu produzieren?

Während es bestimmt möglich ist zu bestreiten, dass unterhalb der Sprache als tiefere Schicht die Mathematik liege (diese Idee geht wohl auf John von Neumanns „The Computer and The Brain“ von 1958 zurück; vgl. die Diskussion bei Bense 1990, S. 29 ff.), kann wohl niemand bestreiten, dass Sprache ein bestimmtes und vielen weiteren Zeichensystemen ist. Sprache ist also primärzwar nicht unbedingt ein Zahlensystem, aber bestimmt ein Zeichensystem, genauer: ein metasemiotisches System, wie Bense (1981, S. 91 ff.) sich ausdrückte. Hier gibt es nun erstens das in Walther (1979, S. 100 ff.) präsentierte System, das von

$ZR = (M, O, I)$

ausgeht und M die Laute, Silben und Wörter, O die Wortarten und I eine Art von logischer Syntax, von Walther „Konnexe“ genannt, zuordnet. Das hat natürlich zur Folge, dass man z.B. keine Phono-, Morpho- und Lexikotaktik unterscheiden kann und dass die Semantik, d.h. der Interpretantenbezug, mit der Syntax zusammenfällt, usw.

Zweitens kann man jedoch von dem in Bense (1979, S. 67) präsentierten zirkulären Zeichenmodell (wechselseitiger Inklusion der Fundamentalkategorien bzw. semiotischen Funktionen)

$$ZR^* = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I)))$$

ausgehen. Wie man sieht, erscheint hier M seit seinem ersten Auftreten in der ersten Partialrelation auch in der zweiten und dritten Partialrelation, dasselbe gilt pr. pr. für O. Nur I erscheint nur einmal, und wie aus  $ZR = (M \rightarrow O \rightarrow O) \subset ZR^*$  hervorgeht, benötigt die Benses Zeichendefinition zugrunde liegende Mengentheorie ein Anti-Fundierungs-Axiom.

3. Für eine semiotische Grammatiktheorie, welche über Walthers Ansatz hinaus geht, kann man nun M als „Repertoire“ definieren,  $(M \rightarrow O)$  als „Bedeutung“ im Sinn der allgemeinen Semantik, und  $(M \rightarrow O \rightarrow O)$  als „Taktik“. Man kann sogar anstatt M eine Menge von Repertoires  $\{\{M_i\}\}$  einführen, um etwa die Phoneme isoliert, z.B. in Diasystemen, innerhalb der Morphologie (z.B. Zusammenfall der Homorganen im Idg., ausserdem einiger Homolocalen im Finnischen Stufenwechsel, usw.) zu unterscheiden oder z.B. die bereits erwähnte Taktik von der Phonotaktik bis hinauf zur Taktik von Texten zu differenzieren, denn die höchste semiotische Ebene, I, wird nach dieser Konzeption ja als die „Vermittlungsinstanz“ betrachtet, welche die Repertoires M und das Verhältnis dieser Repertoires zum bezeichneten Objekt (vom Einzelobjekt bis zur komplexen Schilderung der Ereignisse eines Romans) miteinander in Beziehung setzt.

Bildet man die Matrix über  $ZR^*$  anstatt über ZR, erhält man

|               | M              | $\{M, O\}$            | $\{M, O, I\}$            |
|---------------|----------------|-----------------------|--------------------------|
| M             | MM             | M $\{M, O\}$          | M $\{M, O, I\}$          |
| $\{M, O\}$    | $\{M, O\}M$    | $\{M, O\}\{M, O\}$    | $\{M, O\}\{M, O, I\}$    |
| $\{M, O, I\}$ | $\{M, O, I\}M$ | $\{M, O, I\}\{M, O\}$ | $\{M, O, I\}\{M, O, I\}$ |

und wie man sieht, bekommt man nun, wenn man von der Trias „Repertoire – Semantik – Taktik“ ausgeht, das folgendes elementares grammatiktheoretische Modell

|            | Repertoire  | Semantik    | Taktik       |
|------------|-------------|-------------|--------------|
| Repertoire | REP         | Wortbildung | Funkt. SP    |
| Semantik   | Morphol.    | SEM         | Wortstellung |
| Taktik     | Phonotaktik | Semotaktik  | TAK          |

REP, SEM, TAK sind dabei die Idealgebiete, wie die „reine Phonetik“ Sievers', die „reine Semantik“ Havers' (Emphasiethorie), und TAK wäre etwa die angeblich von sämtlichen übrigen grammatischen Ebenen unbeeinflusste Syntaxtheorie in Chomsky (1957). In die Repertoriethorie der Semantik fällt die klassische Wortbildungslehre; hier wird z.B. entschieden, warum es Schleswig-Holstein, aber nicht \*Mercedes-Opel gibt. Die Repertoiretheorie der Taktik behandelt die Funktionale Satzperspektive mit ihren syntaktischen Grundtypen (SOV, SVO, VSO, ...) ebenso wie ihren pragmatischen Aufteilungen in subjekt- und topikprominente Sprachen. Die Semantik der Repertoires behandelt z.B. die klassische Morphologie, d.h. das System der Prä-, In- und Suffixe, d.h. der Affixe sowie (Nominal-, Verbal- usw.) Ableitungen von Wörtern. Die Semantik der Taktik behandelt die Wortstellung, und zwar – wie aus diesem Modell klar hervorgeht – primär unabhängig von der FSP, den syntakt. und pragm. Grundtypen, d.h. sie befasst sich z.B. mit Topikalisierungen, Fokussierungen und verwandten Phänomenen und i.a. mit der „Freiheit“ der Wortstellungen von Sprachen (vgl. die bekannte Liste der Permutationen des lat. Satzes „Caesar pontem fieri iussit“). Die drei Taktiken des Interpretantenbezugs bedürfen keiner Erläuterung mehr; vorbildlich zu ihrer Erforschung war die Stratifikationsgrammatik, in der bekanntlich jedes Stratum seine eigene Taktik besass.

4. Für eine massgebliche Verfeinerung des Analyseapparates empfiehlt sich der Übergang von der kleinen zur grossen Semiotik Matrix, die in Bense (1975) eingeführt worden war. In der entsprechenden Matrix, die 81 und nicht 9 Einträge enthält, bilden die Basiselemente dann nicht mehr Paare, sondern Paare von Paaren kartesischer Produkte.

## **Bibliographie**

- Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975  
 Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979  
 Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981  
 Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992  
 Chomsky, Noam, Syntactic Structures. MIT 1957  
 Dausen, August, Theorien der Linguistik. Stuttgart 1994  
 von Neumann, John, The Computer and The Brain. Princeton 1958  
 Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979

## Zeichenrelationen auf der Basis bisimulativer Gleichungssysteme

1. Wie ich bereits in früheren Arbeiten gezeigt hatte, setzt Benses „verschachtelte“ Definition der Peirceschen Zeichenrelation (1979, S. 53)

$$\text{ZR}^* = (\text{M}, ((\text{M} \rightarrow \text{O}), (\text{M} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{I})))$$

eine Mengentheorie mit AFA (Anti-Fundierungsaxiom) voraus, da  $\text{ZR}^*$  zirkulär ist. AFA (vgl. Aczel 1988) setzt ja als Basis-Axiom

$$\Omega = \{\Omega\}$$

voraus, denn wie man leicht sieht, haben wir in  $\text{ZR}^*$

$$\text{M} \subset (\text{M} \subset \text{O})$$

$$\text{M} \subset (\text{M} \subset \text{O} \subset \text{I})$$

$$\text{O} \subset (\text{M} \subset \text{O} \subset \text{I}).$$

2. Ein interessanter Fall eines weiteren bisimulativen Systems findet man in Barwise und Moss (1996, S. 77):

$$x = \{y\}$$

$$y = \{x, z\}$$

$$z = \{x\}.$$

Wir setzen also

$$\text{M} := x, \text{O} := y, \text{I} := z$$

und erhalten zunächst entsprechend einfachem  $\text{ZR} = (\text{M}, \text{O}, \text{I})$ .

$$\text{ZR} = \langle \{\{y\}, \{x, z\}, \{x\}\} \rangle.$$

Wenn wir das neue System jedoch auf  $\text{ZR}^*$  anwenden, bekommen wir die Verschachtelung

$$\text{ZR}^* = \langle \{y\}, ((\{y\} \rightarrow \{x, z\}), \{\{y\} \rightarrow \{x, z\} \rightarrow \{x\}\}) \rangle.$$

### Bibliographie

Aczel, Peter, Non-well-founded sets. Cambridge 1988

Barwise, Jon/Lawrence Moss, Vicious Circles. Stanford 1996

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

# Mengentheoretische Zirkularität und semiotische Umgebungen

1. Aus dem AFA (Anti-Fundierungs-Axiom, cf. Aczel 1988)

$$\Omega = \{\Omega\}$$

folgt z.B (Barwise und Moss 1996, S. 77):

$$x = \{y\}$$

$$y = \{x, z\}$$

$$z = \{x\}.$$

Wir können also setzen

$$M := x, O := y, I := z$$

und erhalten zunächst entsprechend einfachem ZR = (M, O, I).

$$\text{ZR} = \langle \{\{y\}, \{x, z\}, \{x\}\} \rangle.$$

Ferner erhalten wir für die vollständige „verschachtelte“ Zeichenrelation

$$\text{ZR}^* = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))).$$

auf Grund von Bense (1979, S. 53):

$$\text{ZR}^* = \langle \{y\}, ((\{y\} \rightarrow \{x, z\}), \{\{y\} \rightarrow \{x, z\} \rightarrow \{x\}\}) \rangle.$$

2. Sowohl ZR als auch ZR\* enthalten also keine Elemente, sondern nur Mengen bzw. semiotische „Elemente“ werden selbst als Mengen definiert. Aus

$$x = \{y\} \text{ und}$$

$$z = \{x\}$$

folgt nun aber auch

$$z = \{\{y\}\},$$

d.h. die bereits in Toth (2010) eingeführte Umgebung von  $\{y\}$ :

$$U\{y\} := \{\{y\}\}.$$

Nun kann man auf die gleiche Weise wie oben semiotische Umgebungen für sämtliche Fundamentalkategorien definieren, denn das Barwisesche bisimulative Gleichungssystem von oben lässt sich mit folgenden Alternativen formulieren:

|     | 1. Var. | 2. Var. | 3. Var. |
|-----|---------|---------|---------|
| x = | {y}     | {x}     | {z}     |
| y = | {x, z}  | {y, z}  | {x, y}  |
| z = | {x}     | {y}     | {x}     |

Man bekommt somit

$U\{x\} := \{\{x\}\}.$

$U\{y\} := \{\{y\}\}.$

$U\{z\} := \{\{z\}\}.$

Solche Umgebungen sind nicht nur, wie bereits in zahlreichen Arbeiten nachgewiesen, von theoretischem Interesse, sondern z.B. innerhalb der verbalen Semiotik (Linguistik) im Bereich des sog. „Wortinhaltes“ (vgl. Leisi 1953), wenn wir etwa die Verben stecken, stechen, eindrücken, einhämmern, einschlagen usw. betrachten, die sich dadurch in ihrem Wortinhalt unterscheiden, dass das von ihnen präsupponierte Material, worin etwa „hineingetan“ wird, verschieden ist. So ist es bei stecken z.B. ein Nadelkissen, bei Stechen die Haut, bei eindrücken ein weiches Material, bei Hämmern z.B. Stein, bei Einschlagen auch Holz, usw., d.h. wir können hier die Qualitäten der Objekte als deren Umgebungen semiotisch definieren.

## **Bibliographie**

Aczel, Peter, Non-well-founded sets. Cambridge 1988

Barwise, Jon/Lawrence Moss, Vicious Circles. Stanford, CA 1996

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

## Zum Verhältnis von Relations- und Stufenüberschuss

1. Wie zuletzt in Toth (2010) dargestellt, verstehen wir unter den semiotischen Stufenzahlen jene Zahlen, welche den Überschuss des Verhältnisses semiotischer Relationen auf der Basis der Fibonacci- und der Peano-Zahlenreihe angeben. Die Idee, neben der Relation auch den Begriff der Stufe in die Semiotik einzuführen, ergibt sich direkt aus der Einsicht, dass die übliche Peircesche Zeichenrelation

$$ZR = (M, O, I)$$

in dieser Form völlig ungenügend ist und dass daher bereits Bense (1979, S. 53) von der viel präziseren Relation

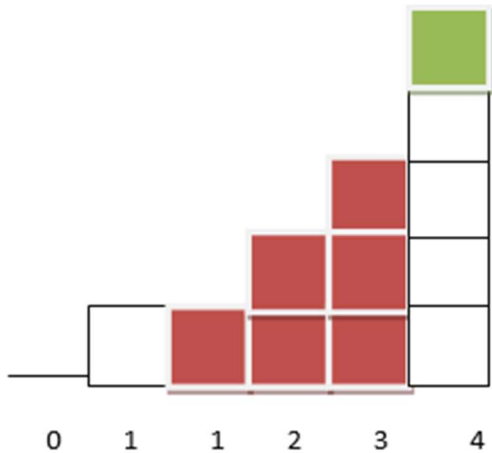
$$ZR^* = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I)))$$

ausgegangen war. Nur stellt sich beim Übergang von ZR zu ZR\* ein grosses Problem ein: ZR\* ist, wie man sofort sieht, zirkulär. Will man also ZR\* weiterhin in einer monokontextualen Semiotik behandeln, muss man zu einer Mengentheorie ausweichen, in welcher das Fundierungsaxiom ausser Kraft gesetzt ist. Hier gibt es heute im wesentlichen zwei Modelle: Das ursprüngliche, wunderbar einfache und so mächtige Modell von Aczel (1988) mit AFA (Anti-Fundierungs-Axiom) und das erweiterte, hochgradig komplexe, aber auch etwas weniger „elegante“ Modell mit AFA und Plenituditätsaxiom von Barwise und Moss (1996).

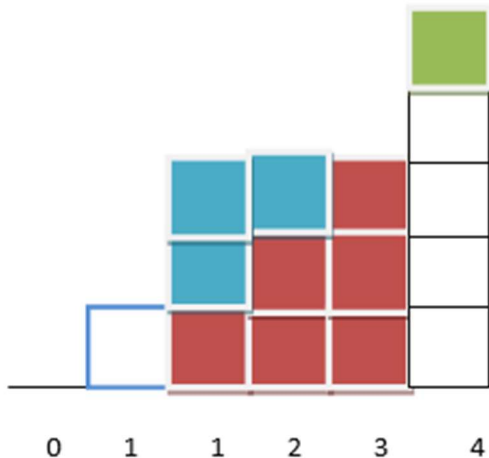
2. Wie bereits früher gezeigt, besteht das wesentliche Moment in einer ZEICHEN-Relation im Gegensatz zu einer anderen dreistelligen Relation („Fritz gibt Hans ein Buch“, „Zürich liegt zwischen St. Gallen und Basel“, usw.) darin, dass die Relation GESTUFT ist, d.h, VERSCHACHTELT, und dies bedingt eben zirkuläre Definitionen der Fundamentalkategorien auf der Basis des Anti-Fundierungsaxioms:

$$\Omega = \{\Omega\}.$$

Bei einer ternären Relation kann mindesens zwischen dem Treppen-, dem Eskalator- und dem Lift-Modell unterscheiden, wenigstens solange man als Basis der Relatinszahlen die Peano-Zahlen heranzieht. Nimmt man jedoch die Fibonacci-Zahlen, ergibt sich als weiteres das Turmmodell:



Im obigen Modell ist  $ZR^*$  rot eingezeichnet, wir haben also ein Treppenmodell als seine Basis. Bis und mit  $R(n) = 3$  sind Peano- und Fibonacci-Zahlen identrisch, jedoch haben wir für  $PZ = 4$   $FZ = 5$ , d.h. die Treppe wächst sozusagen um eine Stufe zu viel (grün). Dieser Stufenüberschuss liegt nun aber auch nicht in der Komplementärmenge des roten Bereichs, den wir im folgenden Bild blau einzeichnen:



Bei  $R(n) = 5$  beträgt dann der Stufenüberschuss bereits  $SZ = 3$ , bei  $R(n) = 6$  ist er  $SZ = 7$ , usw.:

|           |          |          |          |           |           |           |           |            |            |            |     |
|-----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|-----|
| FZ        | 5        | 8        | 13       | 21        | 34        | 55        | 89        | 144        | 233        | 377        | ... |
| $R(n)$    | 4        | 5        | 6        | 7         | 8         | 9         | 10        | 11         | 12         | 13         | ... |
| <b>SZ</b> | <b>1</b> | <b>3</b> | <b>7</b> | <b>14</b> | <b>26</b> | <b>46</b> | <b>79</b> | <b>133</b> | <b>221</b> | <b>364</b> | ... |

Die SZ entgehen also stark progressiv (nicht-linear) den linear progressiven  $R(n)$ 's. Dagegen ist der Relationsüberschuss, wie bereits angetönt, die komplementäre Menge zu den Quadraten über den  $R(n)$ 's, und es gilt

$$SZ(n) \not\subset (R(n))^2$$



d.h. aber, die Stufenüberschüsse sind regelrecht transzendent, denn sie liegen ja im Nirgendwo, d.i. ausserhalb des durch  $C(\mathbb{Z}R)$  definierten semiotischen Zahlenfeldes. Die semiotischen Stufenzahlen  $SZ(n)$  sind für  $n \geq 4$  transzendente Zahlen und daher semiotisch äquivalent zu den nicht-semiotischen transzendenten Zahlen wie  $\pi$ ,  $e$ , der Liouville-Zahl, der Gelfand-Schneider-Potenz usw.

## **Bibliographie**

Aczél, Peter, Non-well-founded sets. Cambridge 1988

Barwise, John/Lawrence Moss, Vicious Circles. Stanford 1996

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Treppe, Eskalator, Lift. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

## Eine Zeichenrelation, basierend auf der Folge der Fibonacci-Zahlen

1. Dass die bekannte Peircesche Zeichenrelation auf den Peano-Zahlen, den sog. Primzeichen (Bense 1980), basiert, ist so selbstverständlich, dass man es gar nicht als Einschränkung empfindet. Natürlich kann man aber statt der Peano-Folge irgendeine Zahlenfolge nehmen; das Ergebnis wird niemals trivial ausfallen.

2. Wir waren deshalb in unseren letzten Arbeiten, z.B. Toth (2010), von der Folge der Fibonacci-Zahlen

FZ = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

ausgegangen. Während das n-te Glied der Peano-Zahlen immer um den Wert 1 grösser ist als das (n-1)-te, stellt das n-te Glied der Fibonacci-Zahlen die Summe der beiden Vorgängerzahlen dar.

3. Wird gehen nun bewusst so vor, dass wir die kategoriale Nullheit nach Bense (1975, S. 65 f.) in die ZR einbetten und nach einem Vorschlag Kaehrs (2008) die relationale Erstheit als Dublette einführen. Dann bekommen wir genau, was wir wollen

ZRF = (0.a 1.b 1.c 2.d 3.e).

4. Da nun sowohl ZRP als auch ZRF auf einer Zahlenfolge mit partieller Inklusion der Vorderglieder in das n-te Glied definiert sind, benötigen wir als mengentheoretische Basis eine Mengentheorie mit Anti-Fundierungsaxiom und/oder Plenituditätsaxiom.

4.1. Das erste System von bisimulativen Gleichungen basiere auf einer Mengentheorie mit AFA allein; die Definition sollen bereits die Inklusionsverhältnisse abbilden. Dann können wir z.B. folgendes System aufstellen:

$0 = \langle 0 \rangle$

$1 = \{\{1\}, \{1\}\}$  bzw.  $\langle 1, 1 \rangle$

$2 = \{\{\{2\}\}\}$

$3 = \{\{\{\{3\}\}\}\}$

Wir haben dann

$ZRF = \{\langle 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \{\{\{2\}\}\}, \{\{\{\{3\}\}\}\}\}$

bzw. in Analogie zu

$ZRF^* = ((0, ((1 \leftrightarrow 1), ((1 \rightarrow 2), (2 \rightarrow 3))))$

haben wir

$ZRF^* = \{\{\langle 0 \rangle, (\{\{\{1\}, \{1\}\}), (\{\{\{1\}, \{1\}\} \rightarrow \{\{\{2\}\}\}), (\{\{\{2\}\}\} \rightarrow \{\{\{\{3\}\}\}\})\}$

4.2. Das zweite System von bisimulativen Gleichungen basiere auf einer Mengentheorie mit AFA und Urelement. Da wir im relationalen Rahmen unserer Zeichenrelation bleiben, setzen wir für das Urelement  $p$  jedoch einen Wert aus  $\{x, y, z, w\}$  ein, z.B.  $x$ . Dann können wir z.B. folgendes System aus Barwise/Moss (1996, S. 78) benutzen:

$$x = \{y, z, w\}$$

$$y = \{p, w\}$$

$$z = \{w\}$$

$$w = \{z, w\}$$

Wir haben dann

$$\text{ZRF} = \{\{y, z, w\}, \{\{x, w\}, \{x, w\}\}, \{w\}, \{z, w\}\}$$

und

$$\text{ZRF}^* = \{\{\langle x, z, w \rangle, \{\{\{\{x, w\}, \{x, w\}\}\}, \{\{\{\{x\}, \{w\}\} \rightarrow \{\{\{\{w\}\}\}\}, (\{\{\{\{w\}\}\}) \rightarrow \{\{\{\{z, mw\}\}\}\}\}\}$$

## Bibliographie

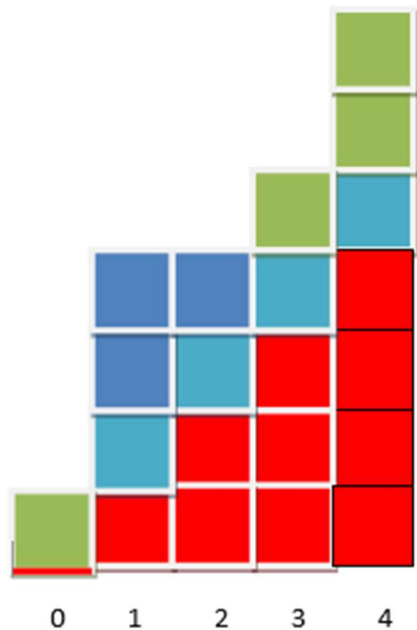
Barwise, John/Moss, Lawrence, Vicious Circles. Cambridge 1996

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: Ars Semeiotica III,3, 1980

Toth, Alfred, Zum Verhältnis von Relations- und Stufenüberschuss. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

# Was ist unter der Transzendenz? Die Hölle des Himmels?

1. Wir wollen von den in dem folgenden Bild dargestellten Relationen ausgehen:



Die rote Relation ist eine pentadische Relation

$${}^5R = (00, 11, 2\ 2, 33, 44),$$

und zwar ist sie definierbar über einem System bisimulativer Gleichungen einer Mengentheorie mit Anti-Fundierungsaxiom (vgl. Aczél 1988):

$$0 = \{0\}$$

$$1 = \{\{0\}, \{\{1\}\}\}$$

$$2 = \{\{0\}, \{\{1\}\}, \{\{\{2\}\}\}\}$$

$$3 = \{\{0\}, \{\{1\}\}, \{\{\{2\}\}\}, \{\{\{\{3\}\}\}\}\}$$

$$4 = \{\{0\}, \{\{1\}\}, \{\{\{2\}\}\}, \{\{\{\{3\}\}\}\}, \{\{\{\{\{4\}\}\}\}\}\}.$$

Vereinfacht ist also  ${}^5R$  eine total-inklusive („verschachtelte“ oder „Basbuschka“-Relation)

$${}^5R = (00 \subset ((11 \subset 22) \subset ((22 \subset 33))) \subset (33 \subset 44))))),$$

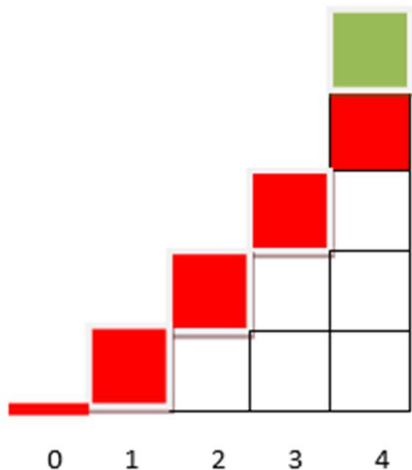
bzw. ein Ausschnitt aus einem theoretisch unendlichen „Stream“

$${}^5R = (00, (11, (2\ 2, (33, (44)))) ... .$$

2. Die dunkelblauen und grünblauen (hellblauen) Punkte ergeben die zur Relation  ${}^5R$  komplementäre Relation  $C({}^5R)$ . Eine Teilmenge von ihr, die im Bild grünblau erscheinen sollte, zuzüglich der grünen Punkte bildet die Menge der in Toth (2010b) eingeführten Relation der Stufenwerte oder Stufenüberschüsse, wie sie sich dann

ergeben, wenn man die Peircesche Zeichenrelation statt auf den Peano-Zahlen (0, 1, 2, 3, ...) z.B. auf der Folge der Fibonacci-Zahlen (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...) aufbaut. Dann besteht z.B. an der Stelle  $RZ = 4$  ein Relationsüberschuss von  $SZ = 3$  und bei  $RZ = 3$  ein Relationsüberschuss von  $RZ = 2$ , sonst beträgt er im eingezeichneten Bereich 0.

3. Nun wurde aber bereits in Toth (2010a) gezeigt, dass die drei Hauptmodelle inklusionaler Relationen das Treppen-, das Eskalator- und das Liftmodell sind. Schauen wir uns also z.B. das folgende, zweite Bild an:



Hier bilden die weissen Punkte UNTERhalb der roten Stufen-Relation eine zur Transzendenz OBERhalb quasi komplementäre Relation. In dme vorliegenden Fall ergibt sie sich als Subtraktion der roten Relation in Bild 2 von der roten Relation in Bild 3, sie enthält also all jene Punkte, welche bei der Progression der Peano-Zahlen in Bild 2 von der roten Punkte beim Schritt von einem Punkt  $n$  zu einem Punkt  $(n+1)$  NICHT inkludiert wird. Das Eskalatormodell besteht aus der roten Relation in Bild 2 plus einer Teilmenge der weissen Punkte in Bild 2. Die beiden Transzenendenzen, die obere in Bild 1 und die untere in Bild 2, verhalten sich also wie die in Himmel und Hölle „gespaltene“ Transzendenz in der Bonaventuraschen Lichtmetaphysik. Sie stellen also eine auf zwei Sphären „dividierte“ Transzendenz dar. Die obere ist die Transzendenz der unteren, und die untere ist die Transzendenz der oberen, es handelt sich um das duale Verhältnis von Transzendenz und Immanenz.

## Bibliographie

Aczel, Peter, Non-well-founded sets. Cambridge 1996

Toth, Alfred, Treppe, Stufe und Eskalator. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

Toth, Alfred, Transzendente semiotische Zahlen. : Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010

# Die kenogrammatische Identität von Eigenrealität und Kategorienrealität

1. Bereits Bense (1992) hatte eine strukturelle und phänomenologische Verwandtschaft der selbst-dualen Zeichenklasse der Eigenrealität

$$\times(3.1 \ 2.2 \ 1.3) = (3.1 \ 2.2 \ 1.3)$$

und der quasi-selbst-dualen Zeichenrelation der Kategorienrealität

$$\times(3.3 \ 2.2 \ 1.1) = (1.1 \ 2.2 \ 3.3)$$

vermutet und auf die symmetrische Transposition zwischen (3.3) und (3.1) auf der einen sowie (1.1) und (1.3) auf der anderen hingewiesen und deshalb im Falle der Kategorienrealität (KR) von „Eigenrealität schwächerer Repräsentation“ (1992, S. 40) gesprochen.

2. Wie nun in Toth (2010) gezeigt wurde, kann man semiotische Monomorphien (zum Begriff vgl. Kaehr 2008) erzeugen, indem man die Fundamentalkategorien von Zeichenrelationen in lexikographischer Ordnung nebeneinander schreibt. Nur im Falle der Eigenrealität (ER) erhalten wir ein symmetrisches semiotisches „Morphogramm“:

$$3.1 \ 2.2 \ 1.3 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{3} \\ \hline \end{array}$$

Da durch die Monomorphien die Zeichen- durch Strukturkonstanz ersetzt wird, repräsentiert das Morphogramm der KR auch die Zeichenklasse der eigenrealität (ER):

$$3.3 \ 2.2 \ 1.1 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{3} \\ \hline \end{array}$$

Die sowohl ER als auch KR gemeinsame kenogrammatische Struktur ist somit

$KG_{ER/KR} = (\square \square \triangle \triangle \blacksquare \blacksquare)$ .

Daraus leiten wir das semiotische Fundamentaltheorem ab:

Theorem: **Eigenrealität und Kategorienrealität sind kenogrammatisch identisch.**

3. Damit dürfte es in Zukunft möglich, die gesamte Semiotik auf eine neue Basis zu stellen. Dies ist aber auch deswegen nötig, Eigen- und Kategorienrealität sehr spät in der Geschichte der Semiotik entdeckt wurde (siehe man von den Bemerkungen zur „Mitrealität“ in Benses Aesthetica ab, die seit 1954 erschien, ist die erste explizite Erwähnung Bense 1986, S. 136). Ferner haben wir bis heute nicht viel mehr als Annäherungen zum Phänomen der Kategorienrealität (vgl. passim in Bense 1992 und zahlreiche Aufsätze von mir in meinem „Electronic Journal“ u.a. zur Homöostase semiotischer Systeme).

Das Wesentliche, was jedoch durch das neu gefundene Theorem ausgesagt wird, ist, dass Kategorialität selbst selbst-referentiell ist, d.h. auch die Fundamentalkategorien sind eigenreal, thematisieren also wie die Zeichen und die Zahl keine andere als ihre eigene Realität, nämlich semiotische Realität.

Ich kann und möchte nun in diesem ersten Aufriss nicht in die Details gehen, sondern es bei der erregenden Feststellung bewenden lassen, dass damit das wohl bedeutendste Problem der Philosophie, wie die Subjekt in die Welt kommt, einer Lösung näher kommt. Wie bekannt, behauptet ja gerade zur Zeit eine der neusten Arbeit zur Kosmologie von Hawking, dass das Universum selbst-erschaffen, also autogenetisch ist. Man bemerkt, dass es sich hier um das physikalische Äquivalent zur semiotischen Eigenrealität im Sinne von selbst-gegebenen, also autopoietischen Systemen handelt. Damit ist aber nur die objektive Seite dieser Welt erklärt, und man musste in der Geschichte der Philosophie zu solch genialen, aber gewagten Theorien wie dem kabbalistischen Zimzum, der Selbst-erschaffung Gottes durch Kreation von Subjektivität als Rückzug im Innern von



Objektivität Zuflucht nehmen. Wenn man aber mit der kenogramatischen Identität von Eigenrealität und Kategorienrealität von der Selbstegebenheit der Fundamentalkategorien, also von Möglichkeit, Wirklichkeit und Notwendigkeit, ausgehen darf und muss, dann ist nicht nur die objektive Seite des Universums qua kategoriale Wirklichkeit, sondern auch die subjektive qua kategoriale Notwendigkeit vorgegeben. Dass diese Auffassung gravierendste Folgen für die Theorie der Apriorität semiotischer Systeme in Sonderheit im Zusammenhang mit der Genese der Semiose hat, das kann man sich nun leicht vorstellen.

### **Bibliographie**

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realität. Baden-Baden 1986

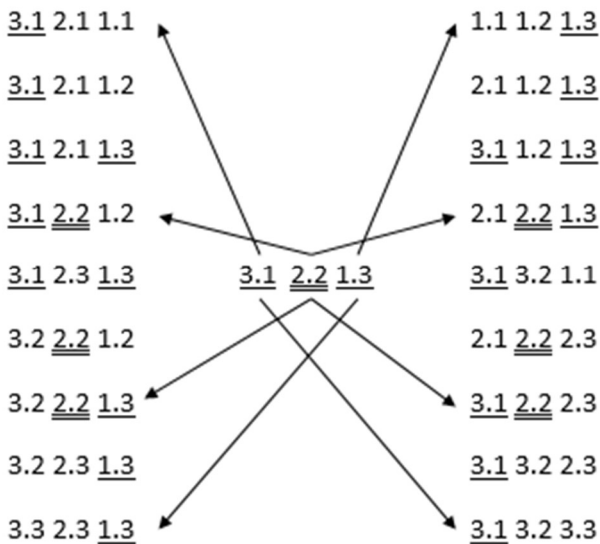
Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Kaehr, Rudolf, Morphogramatics of Change, Glasgow 2008

Toth, Alfred, Operatoren an semiotischen Monomorphien. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010 (erscheint)

# Der Zusammenhang der Zeichenklassen unterhalb der Repräsentationsebene

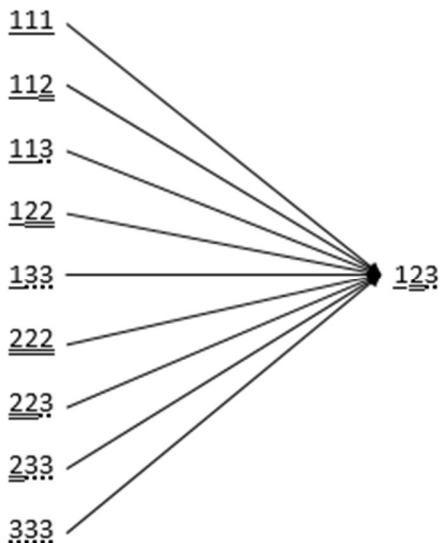
1. Der paradox klingende Titel präsupponiert, dass es Zeichen (oder so etwas wie Zeichen) auch unterhalb der von Peirce und Bense (1986, S. 64) ausdrücklich als „tiefsten“ behaupteten repräsentationellen Ebene gibt. Als Hinweise für die Richtigkeit dieser Annahme akzeptieren wir Kaehrs Kontexturierungstheorie der Zeichenklassen einerseits (Kaehr 2008) und seine Einführung der morphogrammatischen Darstellung der Zeichenklassen andererseits (Kaehr 2009). Als Ergänzung sei auf die Möglichkeit verwiesen, Zeichenklassen als eine Art von „semiotischen Monomorphien“ darzustellen (Toth 2010).
2. Walthers symmetrisches Dualitätssystem der Zeichenklassen und Realitätsthematiken. Nach einem von Walther (1981, 1982) bewiesenen Theorem hängt jede der 10 Peirceschen Zeichenklassen in minimal einem und maximal zwei Subzeichen mit der dual-identischen Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3) zusammen:



Die zwar nicht als reguläre Peircesche Zeichenklassen erscheinende, aber in der kleinen semiotischen Matrix als Hauptdiagonale auftretende Kategorienklasse (3.3 2.2 1.1) sowie viele weiteren Klassen, die nicht nach dem Ordnungsschema (3.a 2.b 1.c) mit  $a \leq b \leq c$  gebaut sind, hängen nicht mit der eigenrealen Zeichenklasse zusammen.

3. Eine erste Reduktion besteht darin, die Triaden wegzulassen, denn wie man zeigen kann, sind sämtliche Zeichenklassen/Realitätsthematiken durch ihre trichotomischen

Werte eindeutig charakterisierbar, so dass also auch hier alle Trichotomien in mindestens einem und in maximal zwei Werten zusammenhängen:



Die Kategorienklasse hängt bis auf die Ordnung ihrer trichotomischen Werte (321) als einzige Klasse in 3 Subzeuichen mit der eigenrealen Zeichenklasse (123) zusammen. Da sämtliche 27 möglichen triadischen Zeichenklassen mindestens je einen trichotomischen Wert 1, 2 oder 3 besitzen, gilt hier im Gegensatz zum Waltherschen eigenrealen Dualsystem: Alle 27 Zeichenklassen hängen in mindestens 1 und maximal 3 trichotomischen Werten miteinander zusammen.

4. Semiotische Monomorphien. In einem anderen Schritt der Komplexitätsbeseitigung werden die Zeichenklassen/Realitätsthematiken (und nicht die Trichotomien!) zu Monomorphien geordnet:

Man bemerkt nun sogleich, dass ER 3.1 2.2 1.3 und KR 3.3 2.2 1.1 identische monomorphe Strukturen haben. Da Eigenrealität und Kategorienrealität (die schon von Bense 1992, S. 40 als Spielarten voneinander eingestuft wurden) hier erstmals zusammenfallen, ist die Ebene semiotischer Monomorphien die tiefste bisher erreichbare semiotische Ebene.

5. Kenogramme. In einem letzten Schritt werden die Monomorphien nun zu „semiotischen Kenogrammen“ aufgelöst:

|  |   |        |   |     |
|--|---|--------|---|-----|
| 3.1 <sub>1456</sub> 2.1 <sub>1</sub> 1.1 <sub>13456</sub>    | → | 111123 | ← | 111 |
| 3.1 <sub>1456</sub> 2.1 <sub>1</sub> 1.2 <sub>1</sub>        | → | 111223 | ← | 112 |
| 3.1 <sub>1456</sub> 2.1 <sub>1</sub> 1.3 <sub>1456</sub>     | → | 111233 | ← | 113 |
| 3.1 <sub>1456</sub> 2.2 <sub>12356</sub> 1.2 <sub>1</sub>    | → | 112223 | ← | 122 |
| 3.1 <sub>1456</sub> 2.2 <sub>12356</sub> 1.3 <sub>1456</sub> | → | 112233 | ← | 123 |
| 3.1 <sub>1456</sub> 2.3 <sub>2</sub> 1.3 <sub>1456</sub>     | → | 112333 | ← | 133 |
| 3.2 <sub>2</sub> 2.2 <sub>12356</sub> 1.2 <sub>1</sub>       | → | 122223 | ← | 222 |
| 3.2 <sub>2</sub> 2.2 <sub>12356</sub> 1.3 <sub>1456</sub>    | → | 122233 | ← | 223 |
| 3.2 <sub>2</sub> 2.3 <sub>2</sub> 1.3 <sub>1456</sub>        | → | 122333 | ← | 233 |
| 3.3 <sub>12456</sub> 2.3 <sub>2</sub> 1.3 <sub>1456</sub>    | → | 123333 | ← | 333 |

Da die semiotischen „Kenogramme“ 6-stellig sind (da sie auch die triadischen Werte) enthalten, für die kontexturierte Darstellung der Zeichenklassen aber 3 bzw. 4 Kontexturen ausreichen, muss dieser Unterschied angepasst werden. Damit stellt sich auch ein immerhin schwach erkennbarer Zusammenhang zwischen den „semiotischen Kenogrammen“ und den Trichotomien her: Nur dann, wenn ein Wert 2 mal in einem Kenogramm auftaucht, ist es ein trichotomischer Wert. So ist etwa der Wert 2 in 112333 nur einfach vorhanden, er geht also nicht als trichotomischer Wert in 133 ein, während er in 122333 2mal vorhanden ist und also als trichotomischer Wert erscheint (233). Der Grund für diese seltsame Praxis liegt darin, dass  $ER = KR = (123) = (112233)$  sind, d.h. trichotomisch „dominant“ ist nur ein doppelt aufscheinender Wert. Entsprechend bedingen doppelt auftretende trichotomische Werte 3 gleiche Kenogramme ( $122333 = (233)$ ): 1 tritt einfach auf, ist also trichotomisch irrelevant, 2 tritt doppelt auf, ist also trichotomisch 1fach relevant, und 3 tritt 3fach auf, ist also gemäss  $(3-2) = 1 + 1 = 2$  mal trichotomisch relevant.

## Bibliographie

- Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986  
 Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992  
 Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. Glasgow 2008  
 Kaehr, Rudolf, Polycontextuality of signs. Glasgow 2009

- Toth, Alfred, Semiotische Moinomorphien. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010
- Walther, Elisabeth, Vorläufige Bemerkungen zu Trichotomischen Triaden. In: Semiosis 21, 1981, S. 29-39
- Walther, Elisabeth, Nachtrag zu "Trichotomische Triaden". In: Semiosis 27, 1982, S. 15-20

# Der Zusammenhang von Zeichen

1. Die monokontexturale Bense-Semiotik kennt nur zwei Arten des Zusammenhangs von Zeichen:

1.1. Zusammenhang durch gemeinsame Subzeichen, z.B.

$$Z[(\underline{3.1} \underline{2.1} \underline{1.1}), (\underline{3.1} \underline{2.2} \underline{1.2})] = (3.1)$$

1.2. Zusammenhang durch gemeinsame Semiosen, z.B.

$$Z[(\underline{3.1} \underline{2.3} \underline{1.3}), (\underline{3.2} \underline{2.3} \underline{1.3})] = (2.3 \rightarrow 1.3)$$

Da eine Semiose eine Abbildung (Morphismus) zweier Subzeichen ist, setzt 1.2 immer 1.1 voraus. Allerdings können nach Bense die Subzeichen selber nicht nur als Objekte, sondern auch als Morphismen aufgefasst werden; Objekte sind dann nicht die Dyaden, sondern die Monaden.

2. Nun stellen jedoch M, O und I nach Bense (1986, S. 17 ff.) „Tripel-Universen“ dar. Allerdings sind diese Universen nicht diskret, sondern wegen

$$ZR = (M, ((M \rightarrow O), (O \rightarrow I)))$$

gilt:

$$(\underline{UM} \subset (\underline{UO} \subset \underline{UI})).$$

Auf der Ebene der Peirce-Zahlen sind die Verhältnisse jedoch leicht verschieden, denn wie man sich anhand der semiotischen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix}$$

leicht überzeugt, gilt ja für die Triaden

$$(\underline{U1.} \subset \underline{U2.} \subset \underline{U3.}),$$

wogegen für die Trichotomien gilt

$$(\underline{U.1} \subseteq \underline{U.2} \subseteq \underline{U.3}).$$

Nun betrachten wir aber die kontextuellen Vermittlungen der triadischen Semiotik, die auf der Basis ihrer 4 2-kontextuellen Semiotiken beruht (Kaehr 2009, S. 9:

| 3 – contextual semiotic matrix |                     |                           |                           |                           |
|--------------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Sem <sup>(3,2)</sup>           | MM <sup>(3,2)</sup> | .1 <sub>1,3</sub>         | .2 <sub>1,2</sub>         | .3 <sub>2,3</sub>         |
|                                | 1 <sub>1,3</sub>    | <b>1.1</b> <sub>1,3</sub> | <b>1.2</b> <sub>1</sub>   | <b>1.3</b> <sub>3</sub>   |
|                                | 2 <sub>1,2</sub>    | <b>2.1</b> <sub>1</sub>   | <b>2.2</b> <sub>1,2</sub> | <b>2.3</b> <sub>2</sub>   |
|                                | 3 <sub>2,3</sub>    | <b>3.1</b> <sub>3</sub>   | <b>3.2</b> <sub>2</sub>   | <b>3.3</b> <sub>2,3</sub> |

Im Teilbereich von ( $\underline{U}1. \subset \underline{U}2. \subset \underline{U}3.$ ) gilt:

$$\underline{U}11 \cap \underline{U}21 \neq \emptyset \quad \underline{U}21 \cap \underline{U}22 \neq \emptyset \quad \underline{U}31 \cap \underline{U}32 = \emptyset$$

$$\underline{U}21 \cap \underline{U}31 = \emptyset \quad \underline{U}22 \cap \underline{U}23 \neq \emptyset \quad \underline{U}32 \cap \underline{U}33 \neq \emptyset$$

wogegen im Teilbereich ( $\underline{U}.1 \subseteq \underline{U}.2 \subseteq \underline{U}.3$ ) gilt

$$\underline{U}11 \cap \underline{U}12 \neq \emptyset \quad \underline{U}21 \cap \underline{U}22 \neq \emptyset \quad \underline{U}31 \cap \underline{U}32 = \emptyset$$

$$\underline{U}12 \cap \underline{U}13 = \emptyset \quad \underline{U}12 \cap \underline{U}23 \neq \emptyset \quad \underline{U}32 \cap \underline{U}33 \neq \emptyset$$

Was für Schlüsse können hieraus gezogen werden? Erstens sind die Verhältnisse für die Tripeluniversen völlig unabhängig von den Peirce-Zahlen, denn sie sind strukturell identisch. Zweitens aber stehen wir vor der semiotisch erregenden Tatsache, dass sowohl im trichotomischen

$$(1.2)1 \subset (1.3)3$$

als auch im triadischen Fall

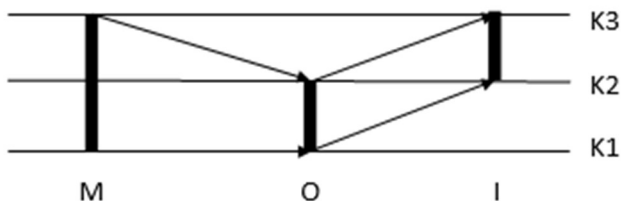
$$(1.3)3 \subset (2.3)2$$

zwei Teiluniversen, obwohl sie ineinander topologisch enthalten sind, in verschiedenen Kontexturen liegen können, und zwar obwohl hier keine Spur von semiotischer (via Subzeichen oder Semiosen) bzw. kontextueller Mediation vorliegt!

Wenn wir jedoch nochmals zur Zeichendefinition (Bense 1979, S. 53) zurückgehen

$$ZR = (M1.3, ((M1.3 \rightarrow O1.2), (O1.2 \rightarrow I2.3))),$$

so erkennen wir, dass hier noch alles in Ordnung ist, denn alle Kategorien sind nicht nur durch Mengeninklusion, sondern auch durch kontextuellen Zusammenhang miteinander verbunden:



Ich möchte diese Pathologie als Satz formulieren dürfen:

**Theorem:** Semiotische semiotischen Teilsysteme können, obwohl sie topologisch ineinander enthalten sind, in verschiedenen Kontexturen liegen.

Der Grund für ihr Auftreten dürfte in den von mir schon in früheren Arbeiten bemerkten ebenfalls pathologischen „gebrochenen“ Kategorien liegen, die Peirce erfunden hat. Man bedende einmal, dass eine Kategorie ein Denkuniversale ist. Nun basiert die gesamte Semiotik darauf, dass aus solchen Denkuniversalen „kartesische Produkte“ gebildet werden. – Diese ganze Thematik, die hier angerissen wurde, ist

indessen noch sehr weit von irgendwelchen Lösungen entfernt, so dass ich an dieser Stelle vorderhand abbreche.

## **Bibliographie**

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Kaehr, Rudolf, Polycontextuality of signs? In: Diamond Semiotic Short Studies, S. 251 ff.

<http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Short%20Studies/Diamond%20Semiotic%20Short%20Studies.pdf> (2009)



# Pathologien der Semiotik

1. Eine Besonderheit der Peirceschen Kategorienlehre besteht bekanntlich darin, dass Peirce seine Kategorien mit den später von Bense so bezeichneten „Primzeichen“ (bzw., wie ich vorziehe: Peirce-Zahlen) zu identifizieren, was es ihm erlaubt, eine semiotische Matrix aus der kartesischen Multiplikation dieser Kategorien herzustellen. So entspricht also z.B. (1.1) der „Möglichkeit der Möglichkeit“, (1.2) der „Wirklichkeit der Möglichkeit“, (2.1) der „Möglichkeit der Wirklichkeit“, usw. Eine beliebige Zeichenklasse wie z.B. (3.1 2.1 1.3) enthält also z.B. 3 mal die Erstheit, 1mal die Zweitheit und 2mal die Erstheit, d.h. ausgehend von der maximalen (argumentischen) Zeichenklasse (3.3 2.3 1.3) mit Repräsentationswert  $3+3+2+3+1+3 = 15$  entfallen  $2/15$  für M,  $1/15$  für O und  $3/15 = 1/5$  für I. Geht man als Basis von jeder Zeichenklasse separat aus, entfallen bei  $Rpw(3.1 2.1 1.3) = 11$ :  $2/11$  für M,  $1/11$  für O und  $3/11$  für I. Was wir hier also vor uns haben, sind **gebrochene Kategorien**. Wenn wir uns bewusst sind, dass ein Kategorie ein (seins- oder bewusstseinsmässiges) Universale ist, so ist das nichts alsbarer Unsinn.

2. Dieser philosophische Unsinn wird dort zum mathematischen und logischen Unsinn, wenn die Zusammensetzungen dieser gebrochenen Kategorien, d.h. die kartesischen Produkte, relationentheoretisch untersucht werden. Wenn wir für  $M := {}^1R$ ,  $O := {}^2R$ ,  $I := {}^3R$  setzen, erhalten wir folgende **relationentheoretische Matrix**:

|         | ${}^1R$    | ${}^2R$    | ${}^3R$    |
|---------|------------|------------|------------|
| ${}^1R$ | ${}^1R^1R$ | ${}^1R^2R$ | ${}^1R^3R$ |
| ${}^2R$ | ${}^2R^1R$ | ${}^2R^2R$ | ${}^2R^3R$ |
| ${}^3R$ | ${}^3R^1R$ | ${}^3R^2R$ | ${}^3R^3R$ |

Wohl kann eine 3-stellige Relation eine 1-stellige binden ( ${}^3R^1R$ ); aber das Umgekehrte ( ${}^1R^3R$ ) ist unmöglich. Ferner haben wir hier gesättigte neben unter- und übersättigten Relationen. Sind letztere einfach unmöglich, müsste man bei Fällen wie ( ${}^3R^1R$ ) valenztheoretisch noch ein  ${}^2R$  binden können, dass wir also drei mögliche dyadische Subzeichen in einer 3. semiotischen Dimension bekommen ( ${}^2R^3R^1R$ ), ( ${}^3R^2R^1R$ ) oder ( ${}^3R^1R^2R$ ) = (2.3.1), (3.2.1) oder (3.1.2), wobei nicht einmal klar wäre, welche Zahlen hier Triade, Trichotomie oder Dimensionszahl sind. Niemand würde in der logischen Linguistik Ausdrücke wie „Zürich liegt zwischen St. Gallen“ oder „Maria liebt Adam einen Brief“ als grammatisch akzeptieren. Genauso aber verhalten sich die relationalen gebrochenen Peirceschen Kategorien, da sie jeder Valenz spotten.

3. Nun ist es so, dass bereits Bense (1971) Permutationen der semiotischen „Normalform“

$$ZR = (M, O, I)$$

akzeptiert hat. So ist (O, M, I) das Schema der Kommunikation, (I, M, O) dasjenige der Peirceschen Kreativität. Dass (I, M, O) einfach das Schema der dualen Realitätsthematiken ist, ist klar. Zusammen mit den beiden übrigen möglichen Grundformen (O, I, M) und (M, I, O) ist also die ganze Menge  $\wp(M, O, I)$  semiotisch definiert. Damit kommen aber zu den bereits aufgezählten kategorialen und relationalen Pathologien als nächstes die **mengentheoretischen** Pathologien, da wir nun entsprechend der Grunddefinition des Zeichens (Bense 1979, S. 53)

$$1. ZR = (M, ((M \subset O), (O \subset I)))$$

auch noch haben

$$2. ZR = (M, ((M \subset I), (I \subset O)))$$

$$3. ZR = (O, ((O \subset M), (M \subset I)))$$

$$4. ZR = (O, ((O \subset I), (I \subset M)))$$

$$5. ZR = (I, ((I \subset M), (M \subset O)))$$

6.  $ZR = (I, ((O \subset O), (O \subset M)))$ ,

d.h. insbesondere alle Fälle, wo Obermengen kleiner als Untermengen und Untermengen grösser als Obermengen sind.

4. Eine vierte, **kontextuelle**, Pathologie ist nicht sehr leicht aufzufinden. Gehen wir aus von der numerischen semiotischen Matrix in ihrer 3-kontextuellen Form (Kaehr 2009, S. 9):

| 3 – contextual semiotic matrix |              |             |             |             |
|--------------------------------|--------------|-------------|-------------|-------------|
| $Sem^{(3,2)}$                  | $MM^{(3,2)}$ | $.1_{1,3}$  | $.2_{1,2}$  | $.3_{2,3}$  |
|                                | $1_{1,3}$    | $1.1_{1,3}$ | $1.2_1$     | $1.3_3$     |
|                                | $2_{1,2}$    | $2.1_1$     | $2.2_{1,2}$ | $2.3_2$     |
|                                | $3_{2,3}$    | $3.1_3$     | $3.2_2$     | $3.3_{2,3}$ |

Mit Bense (1986, S. 14 ff.) sprechen wir von M, O und I als Universen. Wie man sieht, gilt für triadische Universen ( $\underline{U}_1 \subset \underline{U}_2 \subset \underline{U}_3$ ), während für trichotomische Universen (wegen 3.a 2.b 1.c mit  $a \leq b \leq c$ ) gilt ( $\underline{U}_1 \subseteq \underline{U}_2 \subseteq \underline{U}_3$ ). Als nächstes zeigen wir die Verteilungen der komntextuellen Vermittlungen:

1. Im Teilbereich von ( $\underline{U}_1 \subset \underline{U}_2 \subset \underline{U}_3$ ) gilt:

$$\underline{U}_{11} \cap \underline{U}_{21} \neq \emptyset \quad \underline{U}_{21} \cap \underline{U}_{22} \neq \emptyset \quad \underline{U}_{31} \cap \underline{U}_{32} = \emptyset$$

$$\underline{U}_{21} \cap \underline{U}_{31} = \emptyset \quad \underline{U}_{22} \cap \underline{U}_{23} \neq \emptyset \quad \underline{U}_{32} \cap \underline{U}_{33} \neq \emptyset,$$

2. Im Teilbereich ( $\underline{U}_1 \subseteq \underline{U}_2 \subseteq \underline{U}_3$ ) gilt:

$$\underline{U}_{11} \cap \underline{U}_{12} \neq \emptyset \quad \underline{U}_{21} \cap \underline{U}_{22} \neq \emptyset \quad \underline{U}_{31} \cap \underline{U}_{32} = \emptyset$$

$$\underline{U}_{12} \cap \underline{U}_{13} = \emptyset \quad \underline{U}_{12} \cap \underline{U}_{23} \neq \emptyset \quad \underline{U}_{32} \cap \underline{U}_{33} \neq \emptyset$$

Was für Schlüsse können hieraus gezogen werden? Erstens sind die Verhältnisse für die Tripeluniversen völlig unabhängig von den Peirce-Zahlen, denn sie sind strukturell identisch (dies selbst ist eine Art von schwacher Pathologie). Zweitens aber stehen wir vor der semiotisch erregenden Tatsache, dass sowohl im trichotomischen

$(1.2)_1 \subset (1.3)_3$

als auch im triadischen Fall

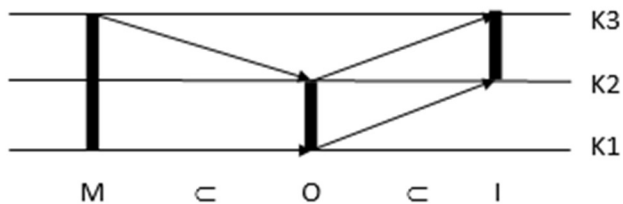
$(1.3)_3 \subset (2.3)_2$

zwei Teiluniversen, obwohl sie ineinander topologisch enthalten sind, in verschiedenen Kontexturen liegen können, und zwar obwohl hier keine Spur von semiotischer (via Subzeichen oder Semiosen) bzw. kontextueller Mediation vorliegt!

Wenn wir jedoch nochmals zur Zeichendefinition (Bense 1979, S. 53) zurückgehen

$ZR = (M_{1,3}, ((M_{1,3} \rightarrow O_{1,2}), (O_{1,2} \rightarrow I_{2,3})))$ ,

so erkennen wir, dass hier noch alles in Ordnung ist, denn alle Kategorien sind nicht nur durch Mengeninklusion, sondern auch durch kontextuellen Zusammenhang miteinander verbunden:



In Toth (2010) hatte ich diese kontextuelle Pathologie als semiotischen Satz formuliert:

**Theorem:** Semiotische Teilsysteme können, obwohl sie topologisch ineinander enthalten sind, in verschiedenen Kontexturen liegen.

Da die Verhältnisse in der obigen Tabelle dann pathologisch zu werden beginnen, wenn man die einfachen Kategorien durch die „gebrochenen“ ersetzt, dürfte der Grund für die kontextuelle Pathologie ebenfalls in den gebrochenen Kategorien liegen.

## **Bibliographie**

Bense, Max, Zeichen und Design. Baden-Baden 1971

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Kaehr, Rudolf, Polycontextuality of signs? In: Diamond Semiotic Short Studies, S. 251 ff.

<http://www.thinkartlab.com/pkl/media/Short%20Studies/Diamond%20Semiotic%20Short%20Studies.pdf> (2009)

Toth, Alfred, Der Zusammenhang von Zeichen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics (2010)

# Die inklusive mono- und polykontexturale Zeichendefinition

1. Nach Bense genügt die übliche Peircesche Zeichenrelation

$$ZR = (M, O, I)$$

nicht, da damit die sog. Zeichenfunktionen nicht in die Definition eingehen. Bense hatte deshalb bereits in seiner Grundlegung einer automatentheoretischen Semiotik (1971, S. 42) die folgende, um die Bezeichnungsfunktion  $o$  und die Bedeutungsfunktion  $i$  erweiterte Definition gegeben:

$$ZR^* = (M, O, I, o, i).$$

Indessen krank auch diese Definition daran, dass die Zeichenfunktionen zusammen mit den Kategorien Inklusionsrelationen bilden. Bense (1979, S. 53) hatte deshalb die folgende vollständige Zeichendefinition vorgeschlagen:

$$ZR^{***} = (M, ((M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I))).$$

Man sollte allerdings nicht vergessen zu bemerken, dass zur Darstellung von  $ZR^{***}$  im Gegensatz zu  $ZR^*$  und  $ZR^{**}$  eine gewöhnliche Mengentheorie wie etwa diejenige von Zermelo-Fraenkel nicht mehr ausreicht, da  $ZR^{***}$  unendliche Regresse (Mirimanoff-Serien) nach sich zieht und somit sehr schnell in Paradoxien verendet. Innerhalb der Monokontexturalität kann man das Problem z.B. damit lösen, dass das Aczelsche Anti-Fundierungsaxiom einsetzt oder „Urelemente“ definiert (vgl. Toth 2010 und weitere Arbeiten).

2. In der Polykontexturalität ist es hingegen natürlich nicht nötig, sich vor Paradoxien zu hüten, die ja an die Monokontexturalität gebunden sind. Trotzdem empfiehlt es sich, die inklusorische Zeichendefinition beizubehalten und von  $ZR^{***}$  anstatt von  $ZR^*/ZR^{**}$  auszugehen. Man kann nun  $ZR^{***}$  sehr einfach dadurch mit der Polykontexturalitätstheorie kompatibel machen, dass man die sog. semiotische Diamantendefinition von Kaehr (2008)

$$\text{Diam}(ZR) = ((A \mid a), (A \rightarrow B \mid c), (A \rightarrow B \rightarrow C \mid b_2 \leftarrow b_1))$$

als Inklusionsrelation, d.h. als „Relation über Relationen“, wie Bense sich ausdrückte, definiert:

$$M := (M \mid m)$$

$$O := (M \rightarrow O \mid m \leftarrow o)$$

$$I := (M \rightarrow O \rightarrow I \mid I \leftarrow o \leftarrow m)$$

Damit erhalten wir

$$ZR^{****} = ((M \mid m), ((M \mid m) \rightarrow ((M \rightarrow O \mid m \leftarrow o), (M \mid m) \rightarrow (M \rightarrow O \mid m \leftarrow o) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I \mid I \leftarrow o \leftarrow m)))).$$

## **Bibliographie**

Bense, Max, Zeichen und Design. Baden-Baden 1971

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Kaehr, Rudolf, Sketch on semiotics in diamonds. Glasgow 2008

Toth, Alfred, Eine neue semiotische Matrix mit AFA. In: Electronic Journal of  
Mathematical Semiotics, 2010

## Semiotische Homologiegruppen

1. Gegeben sei ein mathematisches Objekt, z.B. ein topologischer Raum  $X$ . Man kann nun einen Kettenkomplex  $C(X)$  definieren, der Information über  $X$  enthält. Unter einem Kettenkomplex versteht man eine Sequenz von abelschen Gruppen oder Moduln  $C_0, C_1, C_2, \dots$ , die durch Homomorphismen  $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$  verbunden sind. Man hat also

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

wobei  $0$  die triviale Gruppe und bedeutet und  $C_i \equiv 0$  für  $i < 0$  (Hatcher 2002). Unter Homologie versteht man nun, informell ausgedrückt, eine Methode, um eine Sequenz von abelschen Gruppen mit einem bestimmten mathematischen Objekt zu verbinden.

2. Wie bereits in Toth (2006, S. 96 ff.) gezeigt, gibt es mehrere Möglichkeiten, topologische Räume innerhalb der Semiotik zu definieren. Einen trivialen semiotischen Raum stellt die Menge der Primzeichen  $S = \{1, 2, 3\}$  dar (Bense 1980). Andererseits wurde ebenfalls in Toth (2006, S. 40 ff.) gezeigt, dass sich über  $S$  drei abelsche semiotische Gruppen definieren lassen. Wir führen im folgenden diese 3 semiotischen Gruppen im Detail vor und zeigen anhand eines vereinfachten semiotischen Kettenkomplexes, dass die drei semiotischen Gruppen drei semiotische Homologiegruppen bilden.

### 2.1. Die Gruppe $(S, \circ_1)$

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_1 1 = 2$ ;  $1 \circ_1 2 = 2 \circ_1 1 = 3$ ;  $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$ ;  $2 \circ_1 2 = 1$ ;  $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$ ;  $3 \circ_1 3 = 3$ .

2. Assoziativität:  $1 \circ_1 (2 \circ_1 3) = (1 \circ_1 2) \circ_1 3 = 2$ ;  $2 \circ_1 (3 \circ_1 2) = (2 \circ_1 3) \circ_1 2 = 1$ ,  $3 \circ_1 (3 \circ_1 1) = (3 \circ_1 3) \circ_1 1 = 1$ , usw.

3. Einselement:  $1 \circ_1 3 = 3 \circ_1 1 = 1$ ;  $2 \circ_1 3 = 3 \circ_1 2 = 2$ ;  $3 \circ_1 3 = 3$ , d.h.  $e = 3$ .



4. Inverses Element:  $1-1 = 2$ , denn  $1 \circ 1 2 = 3$ ;  $2-1 = 1$ , denn  $2 \circ 1 1 = 3$ ;  $3-1 = 3 = \text{const.}$

Sei  $\sigma_1: 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$ , dann erzeugt  $\sigma_1$  die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

$\sigma_1 (3.1 2.1 1.1) \rightarrow (3.2 1.2 2.2)$

$\sigma_1 (3.1 2.1 1.2) \rightarrow (3.2 1.2 2.1)$

$\sigma_1 (3.1 2.1 1.3) \rightarrow (3.2 1.2 2.3)$

$\sigma_1 (3.1 2.2 1.2) \rightarrow (3.2 1.1 2.1)$

$\sigma_1 (3.1 2.2 1.3) \rightarrow (3.2 1.1 2.3)$

$\sigma_1 (3.1 2.3 1.3) \rightarrow (3.2 1.3 2.3)$

$\sigma_1 (3.2 2.2 1.2) \rightarrow (3.1 1.1 2.1)$

$\sigma_1 (3.2 2.2 1.3) \rightarrow (3.1 1.1 2.3)$

$\sigma_1 (3.2 2.3 1.3) \rightarrow (3.1 1.3 2.3)$

$\sigma_1 (3.3 2.3 1.3) \rightarrow (3.3 1.3 2.3)$

## 2.2. Die Gruppe $(S, \circ_2)$

$(PZ, \circ_2)$  wurde bereits von Bogarín (1992) als Gruppe nachgewiesen, nachdem Bense kurz darauf hingewiesen hatte, dass "die kleine semiotische Matrix [...] der Cayleyschen Gruppentafel entspricht" (1986, S. 43).

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_2 1 = 3$ ;  $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$ ;  $1 \circ_2 3 = 3 \circ_2 1 = 2$ ;  $2 \circ_2 2 = 2$ ;  $2 \circ_2 3 = 3 \circ_2 2 = 3$ ;  $3 \circ_2 3 = 1$ .

2. Assoziativität:  $1 \circ_2 (2 \circ_2 3) = (1 \circ_2 2) \circ_2 3 = 2$ ;  $2 \circ_2 (3 \circ_2 2) = (2 \circ_2 3) \circ_2 2 = 3$ ,  $3 \circ_2 (3 \circ_2 1) = (3 \circ_2 3) \circ_2 1 = 3$ , usw.

3. Einselement:  $1 \circ_2 2 = 2 \circ_2 1 = 1$ ;  $2 \circ_2 2 = 2$ ;  $3 \circ_2 2 = 2 \circ_2 3 = 3$ , d.h.  $e = 2$ .

4. Inverses Element:  $1-1 = 3$ , denn  $1 \circ_2 3 = 2$ ;  $2-1 = 2 = \text{const.}$ ,  $3-1 = 1$ , denn  $3 \circ_2 1 = 2$ .

Sei  $\sigma_2: 1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ , dann erzeugt  $\sigma_2$  die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

$$\sigma_2(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (1.3\ 2.3\ 3.3)$$

$$\sigma_2(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 2.3\ 3.2)$$

$$\sigma_2(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 2.3\ 3.1)$$

$$\sigma_2(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.3\ 2.2\ 3.2)$$

$$\sigma_2(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 2.2\ 3.1)$$

$$\sigma_2(3.1\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.3\ 2.1\ 3.1)$$

$$\sigma_2(3.2\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 3.2)$$

$$\sigma_2(3.2\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (1.2\ 2.2\ 3.1)$$

$$\sigma_2(3.2\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.2\ 2.1\ 3.1)$$

$$\sigma_2(3.3\ 2.3\ 1.3) \rightarrow (1.1\ 2.1\ 3.1)$$

### 2.3. Die Gruppe (PZ, $\circ_3$ )

1. Abgeschlossenheit:  $1 \circ_3 1 = 1$ ;  $1 \circ_3 2 = 2 \circ_3 1 = 2$ ;  $1 \circ_3 3 = 3 \circ_3 1 = 3$ ;  $2 \circ_3 2 = 3$ ;  $2 \circ_3 3 = 3 \circ_3 2 = 1$ ;  $3 \circ_3 3 = 2$ .

2. Assoziativität:  $1 \circ_3 (2 \circ_3 3) = (1 \circ_3 2) \circ_3 3 = 1$ ;  $2 \circ_3 (3 \circ_3 2) = (2 \circ_3 3) \circ_3 2 = 2$ ,  $3 \circ_3 (3 \circ_3 1) = (3 \circ_3 3) \circ_3 1 = 2$ , usw.

3. Einselement:  $1 \circ_3 1 = 1$ ;  $2 \circ_3 1 = 1 \circ_3 2 = 2$ ;  $3 \circ_3 1 = 1 \circ_3 3 = 3$ , d.h.  $e = 1$ .

4. Inverses Element:  $1^{-1} = 1 = \text{const.}$ ,  $2^{-1} = 3$ , denn  $2 \circ_3 3 = 1$ ,  $3^{-1} = 2$ , denn  $3 \circ_3 2 = 1$ .

Sei  $\sigma_3: 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2$ , dann erzeugt  $\sigma_3$  die folgenden Bedeutungsklassen aus den 10 Peirceschen Zeichenklassen:

$$\sigma_3(3.1\ 2.1\ 1.1) \rightarrow (2.1\ 3.1\ 1.1)$$

$$\sigma_3(3.1\ 2.1\ 1.2) \rightarrow (2.1\ 3.1\ 1.3)$$

$$\sigma_3(3.1\ 2.1\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 3.1\ 1.2)$$

$$\sigma_3(3.1\ 2.2\ 1.2) \rightarrow (2.1\ 3.3\ 1.3)$$

$$\sigma_3(3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (2.1\ 3.3\ 1.2)$$

$\sigma_3 (3.1 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.1 \ 3.2 \ 1.2)$

$\sigma_3 (3.2 \ 2.2 \ 1.2) \rightarrow (2.3 \ 3.3 \ 1.3)$

$\sigma_3 (3.2 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (2.3 \ 3.3 \ 1.2)$

$\sigma_3 (3.2 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.3 \ 3.2 \ 1.2)$

$\sigma_3 (3.3 \ 2.3 \ 1.3) \rightarrow (2.2 \ 3.2 \ 1.2)$

Alle drei Gruppen sind offensichtlich kommutativ, d.h. abelsch, d.h. sie erfüllen unsere Voraussetzung.

3. Die Folge der drei abelschen semiotischen Gruppen  $C(S_1)$ ,  $C(S_2)$  und  $C(S_3)$  sind nun durch die folgenden Homomorphismen verbunden:

$\partial_1: C(S_1) \rightarrow C(S_2) := 1 \rightarrow 2 / 2 \rightarrow 1$

$\partial_n: C(S_1) \rightarrow C(S_3) := 1 \rightarrow 3 / 3 \rightarrow 1$

$\partial_n: C(S_2) \rightarrow C(S_3) := 2 \rightarrow 3 / 3 \rightarrow 1,$

d.h. aber, dass nun alle semiotischen Voraussetzungen für eine Darstellung von  $S$  als Homologiegruppe vorhanden sind.

## **Bibliographie**

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: *Ars Semeiotica* 3/3,1980

Bense, Max, *Repräsentation und Fundierung der Realitäten*. Baden-Baden 1986

Toth, Alfred, *Grundlegung einer mathematischen Semiotik*. 2. Aufl. Klagenfurt 2006